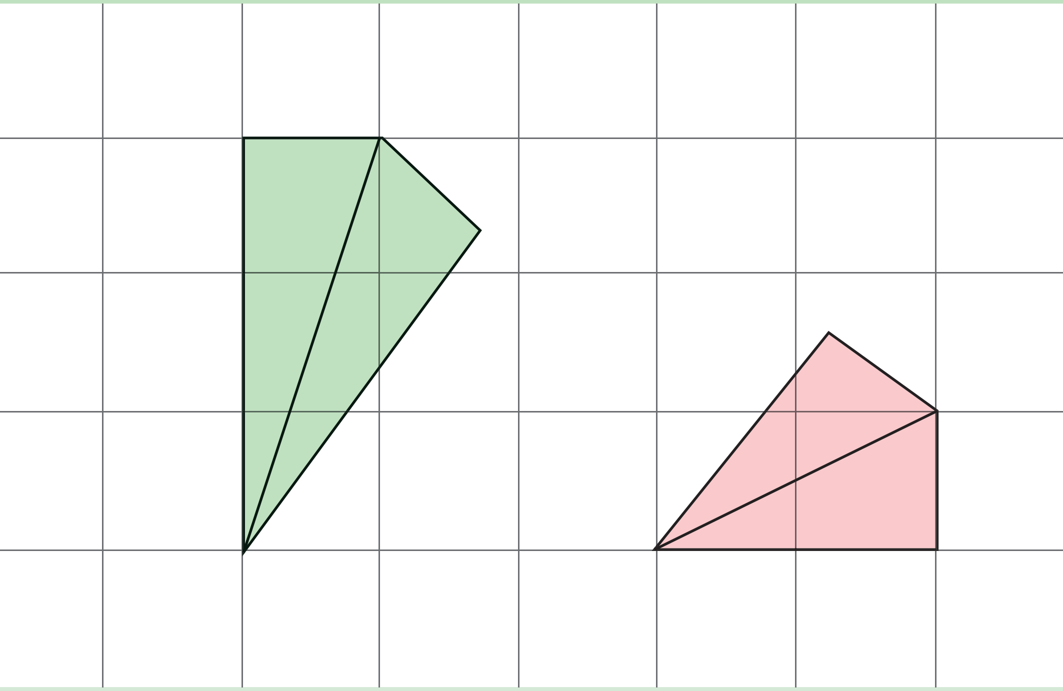
ISSN 0130-2221
МАЙ
2019 · № 5

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ВОЗДУШНЫЕ ЗМЕИ и ДОМИНО



Воздушным змеем типа (a, b) называется геометрическая фигура, полученная отражением прямоугольного треугольника с катетами a и b относительно его гипотенузы. На рисунке показаны воздушные змеи типов (1, 3) и (1, 2), которые используются в качестве деталей в головоломке, предложенной много лет назад американским математиком Эдом Пеггом (Ed Pegg Jr.).

Важное свойство этих двух змеев: их острые углы в сумме дают 90 градусов. Это прямо видно из рисунка (а если вырезать фигурки такой формы, то можно убедиться в этом «своими руками»), но при желании этот факт можно строго доказать (попробуйте!).

Кроме змеев в головоломке используются обычные доминошки – прямоугольники размером 1×2. А задача заключается в том, чтобы сложить квадрат 7×7 из набора, в котором пять змеев типа (1, 3), десять змеев типа (1, 2) и семь доминошек. После того, как Пегг обсудил эту головоломку с коллегами, оказалось, что эту же задачу можно решить и с другим набором тех же фигур: из трех змеев типа (1, 3), двенадцати змеев типа (1, 2) и восьми доминошек тоже можно сложить квадрат 7×7. Так что вместо одной задачи получаются сразу две. Возможно, вам удастся найти и другие наборы из тех же фигур, из которых можно составить такой же квадрат.

Желаем успехов!

Е.Епифанов

КВАНТ МАЙ 2019 № 5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Д.И.Менделеев и периодическая система элементов. *Л.Белопухов*

10 Элементарное доказательство закона больших чисел. *Д.Чибисов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

17 О вращении отрезка. *В.Болтянский*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

22 Задачи М2558–М2561, Ф2565–Ф2568

23 Решения задач М2546–М2549, Ф2553–Ф2556

30 Ряд чисел, обратных к простым. *В.Брагин*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

34 Задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

35 Диагональ клетчатого прямоугольника. *Е.Бакаев*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

40 Итоги конкурса 2018/19 чебного года

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

41 Принцип суперпозиции в электростатике. *С.Крюков*

ОЛИМПИАДЫ

45 XL Турнир городов

47 LXXXII Московская математическая олимпиада

49 Всероссийская олимпиада по физике имени Дж.К.Максвелла

52 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (16)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье Д.Чибисова*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

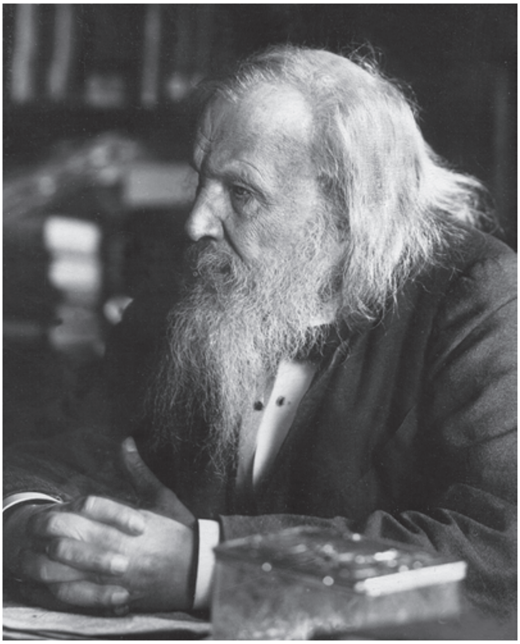
IV *Прогулки с физикой*

Д.И.Менделеев и периодическая система элементов

Л.БЕЛОПУХОВ

В СЕНТЯБРЕ 2017 ГОДА ГЕНЕРАЛЬНАЯ ассамблея ООН провозгласила «год, начинающийся 1 января 2019 года, Международным годом Периодической таблицы химических элементов в целях повышения осведомленности мировой общественности о фундаментальных науках и расширения образования в области фундаментальных наук». Это было сделано по предложению нескольких международных организаций, в том числе Международного союза теоретической и прикладной химии, Российской академии наук, Объединенного института ядерных исследований, Российкого химического общества имени Д.И.Менделеева.

150 лет назад, 17 февраля 1869 года (по принятому тогда в России юлианскому календарю), Дмитрий Иванович Менделеев поставил эту дату и свою подпись под одностраничной рукописью, названной им «Опыт системы элементов, основанной на их атомном весе и химическом сродстве». Отчетливо сознавая значение сделанного им открытия («опыта»), Д.И. Менделеев через несколько дней отправил сделанные переписчиками копии этой рукописи западноевропейским коллегам-химикам. Прежде всего, он послал рукопись немцу Юлиусу Лотару Мейеру (1830–1895), англичанину Джону Ньюлендсу (1837–1898) и итальянцу Станислао Канницаро (1826–1910). Интересно отметить, что эти химики и сам Менделеев были практически ровесниками, сравнительно молодыми учеными. В 1860–66 годах они независимо друг от друга стремились навести порядок в системе химических элементов, которых



Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907)

тогда было известно уже около 60. Большая часть из этого числа была открыта в 40–60-е годы XIX века и для них еще не были надежно определены атомные веса и химические свойства (возможные валентности).

В 1860 году С.Канницаро, расположив элементы в порядке увеличения их атомного веса, подметил некоторые закономерности в похожести химических свойств. Л.Мейер в 1864 году, выбрав 28 элементов, впервые составил некую таблицу из 6 столбцов, соответствующих 6 возможным валентностям. Но в каждой из 5 строк этой таблицы элементы располагались не по возрастанию атомного веса, а довольно хаотично. Причиной этого было неточное

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190501

знание атомных весов и наличие нескольких возможных валентностей у многих элементов. Периодичность по строкам и столбцам нарушалась. Но сама идея поисков периодичности при расположения элементов по строкам и столбцам была здравой и многообещающей. На родине Мейера, в городке Фарель в Нижней Саксонии, неподалеку от устья Эльбы установлен мемориал с тремя скульптурными портретами – Мейера, Менделеева и Канницаро.

Английский химик Д.Ньюлендс тоже подметил некоторую закономерность в списке элементов. Он назвал эту закономерность «правилом октав». В начале списка Канницаро валентности повторялись через каждые шесть элементов, 2-й, 9-й и 16-й элементы имели валентность 1, а 3-й, 10-й и 16-й элементы имели валентность 2.Это походило на музыкальную октаву, в которой между тонами «до» расположено шесть других основных тонов. Правда, после кальция, занимавшего 17-е место в списке, это правило теряло свою обязательность. Опубликованная в 1865 году работа Ньюлендса не вызвала, однако, интереса у химиков и даже подверглась насмешкам на заседании Лондонского химического общества.

Таким образом, у истоков создания периодической системы стояли четыре человека, однако создателем периодической системы элементов признан российский химик.

Так что же сделал Д.И.Менделеев?

Прежде всего, он руководствовался списком не из 28 элементов (Мейер) и не из 40 элементов (Канницаро), а из 67 элементов, смело оставив в этом списке места для трех, совершенно неизвестных в то время элементов, по его мнению обязанных находиться в определенных местах таблицы согласно их возможной валентности и возможному атомному весу. Это означает, что для самого автора периодичность уже была установленным законом, хотя он и озаглавил свою таблицу «опытом». В этом сказалась методологическая (философская) убежденность Менделеева в существовании цикличности в глобальных законах природы.


ОПЫТЪ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВЪ,

ОСНОВАННОЙ НА ИХЪ АТОМНОМЪ ВѢСѢ И ХИМИЧЕСКОМЪ СХОДСТВѢ.

			Ti=50	Zr=90	?=180.
			V=51	Nb=94	Ta=182.
			Cr=52	Mo=96	W=186.
			Mn=55	Rh=104,4	Pt=197,4.
			Fe=56	Ru=104,4	Ir=198.
			Ni=Co=59	Pl=106,6	Os=199.
H=1			Cu=63,4	Ag=108	Hg=200.
	Be=9,4	Mg=24	Zn=65,2	Cd=112	
	B=11	Al=27,4	?=68	Ur=116	Au=197?
	C=12	Si=28	?=70	Sn=118	
	N=14	P=31	As=75	Sb=122	Bi=210?
	O=16	S=32	Se=79,4	Te=128?	
	F=19	Cl=35,5	Br=80	I=127	
Li=7	Na=23	K=39	Rb=85,4	Cs=133	Tl=204.
		Ca=40	Sr=87,6	Ba=137	Pb=207.
		?=45	Ce=92		
		?Er=56	La=94		
		?Yt=60	Di=95		
		?In=75,6	Th=118?		

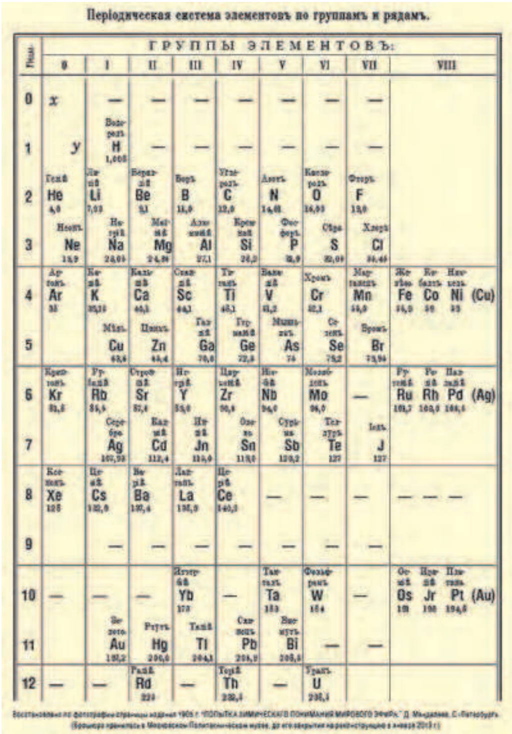
«Опыт системы элементов» (1869 г.)

В первом варианте своей таблицы Менделеев, в отличие от Мейера, элементы с одинаковой валентностью располагал не по вертикали (в столбах), а по горизонтали (в строках). Это не меняло сути дела, и уже во втором варианте таблицы в 1870 году он повернул таблицу на 90 градусов, и она приняла более привычный нам вид. Номера столбцов стали соответствовать «главным» валентностям элемента (с первого по седьмой) и называться группами, а строки получили название периодов, в которых содержалось либо 7, либо 17 элементов. Отличие от современных значений – 8 групп (или 18, как принято в наиболее современных вариантах периодической системы) и по 8 или 18 элементов в периоде – обусловлено тем, что в то время еще совершенно не были известны элементы, называемые сегодня благородными (инертными) газами. Только за 4 месяца до открытия Менделеева появились первые сообщения о гипотетическом солнечном газе, а на Земле гелий был открыт лишь через 27 лет после этого. И уже впоследствии состоялось открытие других благородных газов.

Очень важным было то, что менделеевская таблица предсказала существование нескольких неизвестных тогда химических элементов, которые Менделеев назвал эка-алюминием, эка-кремнием и эка-бором. Через 6 лет после работы Менделеева французским химиком Лекоком де Буабодраном был открыт элемент, названный галлием. И хотя интересы Менделеева в это время уже сместились в другие области науки, он продолжал следить за научными публикациями по химии. Прочитав об открытии галлия, он тут же узнал в нем свой предугаданный эка-алюминий.

Сообщение Менделеева об этом в письме французскому химику произвело настоящую сенсацию среди ученых. Тем более, что предсказания Менделеева о плотности и атомном весе этого элемента оказались даже более точными, чем первоначально опубликованные опытные данные. В десятках европейских лабораториях химики стали лихорадочно искать остальные предсказанные Менделеевым элементы и проверять у известных элементов сомнительные атомные веса и химические свойства. И уже через год шведский химик Ларс Нильсон открыл элемент, полностью соответствующий описанному Менделеевым эка-бору. Он назвал его в честь своей родины скандием. При жизни Менделеева был открыт элемент германий (эка-кремний) и началось открытие семейства благородных газов.

Опубликованная Менделеевым в очередном издании своих «Основ химии» в 1905 году таблица периодической системы уже гораздо больше походила на современную. Окончательно эта таблица получила современный вид после работ по анализу рентгеновских спектров элементов Генри Мозли (1913 г.). Мозли понял, что не только валентность, определяемая числом электронов во внешней электронной оболочке атома, определяет положение элемента в той или иной группе. Большую роль играют и спектры, связанные с электронными переходами во внутренних оболочках (K-, L- и M-электронных оболочках). Гораздо резче, чем в оптических спектрах, в рентгеновских спектрах проявляется номер элемента в периодической системе. Сегодня мы знаем, что это и есть зарядовое число атомного ядра элемента. Это позволило Мозли уточнить расположение в периодической таблице многих редкоземельных элементов и предсказать, в свою очередь, открытие ряда тогда еще неизвестных элементов. И в наше время, когда на мощных ускорителях в нескольких мировых научных центрах (и прежде всего в Объединенном институте ядерных исследований в подмосковной Дубне) открыто уже 26 трансурановых элементов, каждый из них занимает положенную ему «клеточку» в периодической системе согласно атомному весу и строению электронных оболочек, определяемому по рентгеновским спектрам.



Періодическая система элементовъ по группамъ и рядамъ.

Ряды	0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	x	—	—	—	—	—	—	—	
1	y	H 1,008	—	—	—	—	—	—	
2	He 4,0	Li 7,03	Be 9,1	B 11,0	C 12,0	N 14,01	O 16,00	F 19,0	
3	Ne 19,9	Na 23,05	Mg 24,36	Al 27,1	Si 28,2	P 31,0	S 32,06	Cl 35,45	
4	Ar 38	K 39,15	Ca 40,1	Sc 44,1	Ti 48,1	V 51,2	Cr 52,1	Mn 55,0	Fe 55,9 Co 59 Ni 59 (Cu)
5		Cu 63,6	Zn 65,4	Ga 70,0	Ge 72,5	As 75	Se 79,2	Br 79,95	
6	Kr 81,8	Rb 85,5	Sr 87,6	Y 89,0	Zr 90,6	Nb 94,0	Mo 96,0	—	Ru 101,7 Rh 103,0 Pd 106,5 (Ag)
7		Ag 107,93	Cd 112,4	Jn 114,0	Sn 119,0	Sb 120,2	Te 127	J 127	
8	Xe 128	Cs 132,9	Ba 137,4	La 138,9	Ce 140,2	—	—	—	— — —
9		—	—	—	—	—	—	—	
10	—	—	—	Yb 173	—	Ta 183	W 184	—	Os 191 Jr 193 Pt 194,8 (Au)
11		Au 197,2	Hg 200,0	Tl 204,1	Pb 206,9	Bi 208,5	—	—	
12	—	—	Rd 225	—	Th 232,5	—	U 238,5		

Периодическая таблица элементов (1905 г.)

Очередным триумфом менделеевской таблицы стало открытие 118-го элемента, который занял место в группе благородных газов. И он получил имя, которое оканчивается не на «-ий», как у всех других трансурановых элементов, а на «-он», как это и положено всем элементам восьмой группы, кроме гелия. Имя это – «оганесон» – дано в 2018 году международным комитетом в честь руководителя работ в Дубне академика РАН Ю.Ц.Оганесяна. Второй раз элементу присвоено имя в честь здравствующего ученого (первым был американский физик Гленн Сиборг, определивший в 1941 году нептуний и плутоний). Среди названий трансурановых элементов 2 астрономических, 9 географических, а 15 названы в честь ученых. Так, 99-й элемент – это эйнштейний, 100-й – фермий, а 101-й элемент заслуженно носит имя «менделевий». Не подлежит сомнению и роль Менделеевской таблицы в открытии элементов радия и полония, за что Мария Склодовская-Кюри в 1911 году получила вторую Нобелевскую премию, на этот раз – по химии.

Но наибольший триумф периодической системы – это ее теоретическое обоснование, сделанное в 1926 году Вольфгангом Паули на основе только что созданного тогда матричного представления квантовой механики. Это обоснование стало одним из первых доказательств справедливости квантовой механики, этого, по мнению многих ученых, величайшего достижения науки в XX веке.

Дмитрий Иванович Менделеев родился 27 января (8 февраля) 1834 года в Тобольске в семье директора гимназии и попечителя народных училищ Тобольской губернии Ивана Павловича Менделеева и Марии Дмитриевны Менделеевой, урожденной Кориильевой. В семье было 14 детей, но восемь из них умерли в младенчестве. Дмитрий был младшим сыном, «последышем», как он сам себя называл впоследствии. Иван Павлович вскоре после рождения младшего сына ослеп и, хоть зрение ему частично смогли восстановить московские хирурги, к работе он вернуться не смог и скончался, когда сыну было чуть больше 10 лет. Воспитанием будущего ученого занималась его мать, происходившая из старинного сибирского рода купцов и промышленников. Она самостоятельно прошла полный гимназический курс и сыграла особую роль в жизни семьи, фактически став главным семейным педагогом.

Мария Дмитриевна быстро поняла, что ее младший сын имеет выдающиеся способности, хотя в гимназии он увлекался математикой и физикой, а к гуманитарным предметам не испытывал интереса. Способности мальчика и его трудолюбие позволили ему закончить гимназический курс в 15 лет. Через год Мария Дмитриевна распродала имущество и отправилась с семьей сначала в Москву, а потом в Петербург, где тогда достаточно высоким был уровень естественно-научного образования, к которому стремился всей душой ее сын. Ей удается обеспечить досрочное (по возрасту) поступление сына в институт, а через год она умирает.

В предисловии к одной из первых научных работ Дмитрий Менделеев пишет: «Это исследование посвящено памяти матери ее последышем. Она смогла его вырастить своим трудом и любовью, воспитывая примером, и, чтобы отдать науке выходца из Сибири, тратила последние средства и силы. Умирая, завещала: избегать самообольщения, настаивать в труде, а не в словах, терпеливо объяснять научную правду, ибо понимала, как при помощи науки, без насилия, любовно, но твердо устраняются предрассудки и ошибки и достигается свобода дальнейшего развития, общее благо и внутреннее благополучие. Заветы матери считаю священными».

В 21 год Менделеев закончил физико-математический факультет Главного педагогического института в Петербурге с золотой медалью и титулом «старший учитель». Два года он работал сначала в Симферополе, а потом в Одессе в гимназии при Ришельевском лицее преподавателем физики, математики и естественных наук. За это время он подготовил и с блеском защитил в Петербургском университете магистерскую диссертацию по химической проблеме и стал приват-доцентом этого университета.

В России тогда наступало новое время – эпоха отмены крепостного права, эпоха преобразований и организация регионального (земского) управления. Правительство Александра II понимало необходимость для этого подготовки просвещенных управленческих кадров, а значит, и развития образования и науки. Резкое увеличение финансирования университетов позволило Менделееву стать стипендиатом двухгодичной стажировки в научные учреждения Германии.

За границей Менделеев не только изучал новейшие достижения химической науки и технологии. Он смог получить средства для создания лаборатории, в которой изучал физико-химические свойства газов и жидкостей, в частности зависимость температуры кипения жидкостей от давления и свойств насыщенного пара.

Менделеев показал, что выше некоторой температуры ни при каком давлении не существует длительного процесса кипения жидкости и, соответственно, не существует явления постепенного сжижения газа. При некоторых температуре и давлении происходит одномоментное сгущение газа или расширение жидкости. Эти параметры впоследствии были названы «критическими», а само состояние вещества при этом – «критическим состоянием». Оказалось, что получение сжиженного газа с помощью сжатия возможно лишь при температуре ниже критической. Открытие Менделеева легло в основу всех будущих технологий получения сжиженных газов.

Во время своей стажировки в Германии Менделеев только начал эти работы. Вернувшись в Россию, он не смог найти подходящее место и финансирование для продолжения работ по сжижению газов. Ведь он формально (по диссертации) был химик, но в химической науке еще не успел проявить себя должным образом. И Менделеев принимает решение отложить на время свои научные занятия. На основе своего обширного знания химии он создает остро необходимый тогда учебник «Органическая химия», а также переводит и издает немецкий учебник «Химическая технология».

Эти издания принесли Д.И.Менделееву известность в научных кругах. А полученная за них академическая Демидовская премия обеспечила некоторое материальное благополучие. Эта премия, между прочим, существует под несколько измененным названием и в наше время и присуждается за выдающиеся научные достижения. Среди недавних лауреатов этой премии такие выдающиеся ученые, как физики Ж.И.Алферов и В.А.Рубаков, математики Л.Д.Фаддеев и Б.В.Раушенбах, историк В.Л.Янин, биологи А.А.Баев и А.С.Спирин, химик И.И.Моисеев.

Демидовская премия позволила Менделееву совершить путешествие по Европе вместе с молодой женой, Феозвой Никитичной Лещевой, его землячкой по Тобольску, падчерицей знаменитого тобольчанина (или «тоболяка», как больше нравится жителям этого города) Петра Павловича Ершова, официального автора «Конька-горбунка». Свое свадебное путешествие Менделеев вовсю использовал для общения с европейскими химиками и изучения всех новинок химической науки.

По возвращении из европейской поездки Менделеев получил место штатного доцента органической химии Петербургского университета и одновременно профессорскую должность в Петербургском технологическом институте. Через два года после защиты докторской диссертации Менделеев становится профессором Петербургского университета по кафедре технической химии.

В это время возникла острая необходимость создать новый учебник по неорганической химии, который бы отражал новейшие достижения бурно развивавшейся химической науки. Эта идея захватила Менделеева. Но в каком порядке излагать описания и химические свойства элементов? Ведь они так разнообразны.

Хорошо изучив свойства всех известных тогда элементов, Менделеев составил картотеку и все время мысленно тасовал эту «колоду», пытаясь найти закономерности расположения элементов. Он знал о подобных попытках европейских химиков, но долгое время у него, как и у них, ничего не выходило. Получила распространение легенда, что решение проблемы пришло к нему во сне. Эту легенду сам Менделеев и создал, живописно описывая, как однажды после бессонной ночи ему в полусне явилось единственно возможное расположение элементов и он тут же записал его на первом попавшемся клочке бумаги. Психологи считают, что это был не сон, а промежуточное состояние между сном и бодрствованием, в котором мозг работает с особой активностью. Менделеев при этом добавлял, что ничего не видит в этом особенного, поскольку долгое время он непрерывно думал об этом, прежде чем решиться на окончательный вариант таблицы, где были вакантные места и где он смело изменял известные тогда атомные веса некоторых элементов, чтобы они заняли соответствующие места в строках и столбцах таблицы. Так, например, несмотря на то, что атомный вес элемента урана тогда считался равным всего лишь 60 условных единиц, Менделеев «присваивает» урану значение атомного веса в 4 раза большее (как оно и оказалось на самом деле) и помещает уран в то самое место таблицы, где он и должен находиться.

Законный триумф и мировое признание, особенно после открытия предсказанных им элементов, не помешали Менделееву продолжать активно работать. Но его научные интересы сместились в другие области. Он вновь занялся изучением поведения газов при различных давлениях и для не очень высоких давлений переосмыслил открытый в 1834 году французским инженером и физиком Полем Клапейроном закон и ввел понятие универсальной газовой постоянной. С тех пор этот закон носит имя Менделеева–Клапейрона и называется уравнением состояния идеального газа. Но на этом Менделеев не успокоился и стал исследовать отклонения от этого закона. Он ввел понятие «реальные газы» и качественно описал отклонения поведения этих газов от «идеальности».

Велики заслуги Менделеева в физической химии, химической технологии и смежных отраслях техники. Вот только некоторые из них: создание безопасного способа получения одного из вариантов бездымного (пироксилинового) пороха, обеспечившее широкое распространение его в мире («менделеевский» порох); разработка теории растворов, в частности определение наиболее оптимального соотношения компонентов в смеси различных жидкостей; изучение поверхностного натяжения жидкостей и доказательство его исчезновения в критическом состоянии вещества; исследование состава нефти и доказательство ее как биогенного, так и абиогенного происхождения; обоснование значения многих составляющих нефти как ценных химических продуктов и разработка методов извлечения из нефти этих продуктов (знаменитая фраза: «сжигать нефть – это все равно, что топить печку ассигнациями»).

К этому впечатляющему «химическому» перечню можно добавить целый ряд других интересов и достижений Д.И.Менделеева. Например, метрологические исследования, руководство созданной им российской «Палатой мер и весов»; метеорологические исследования, изучение земной атмосферы и солнечной короны; участие в создании первых в мире ледоколов для освоения Арктики; написание 25 статей по проблемам промышленной экологии в энциклопедическом словаре Брокгауза и Эфрона.

Но одно из менделеевских увлечений выделяется из общего ряда. Для полноценных наблюдений за солнечной короной во время полного солнечного затмения летом 1887 года Менделеев разрабатывает проект стратостата, равного которому тогда в мире не существовало (диаметром 20 м и объемом больше 3000 $м^2$). Он делает это совместно с изобретателем и воздухоплавателем С.К.Джевецким. Вместе с Менделеевым должен был лететь пилот-аэронавт. Но когда выясняется, что в неожиданно наставшую дождливую погоду шар не сможет поднять двух человек, Менделеев решает, что он полетит один, и после необходимого инструктажа об управлении шаром поднимается в воздух. К сожалению, и на высоте солнце осталось скрытым за облаками и пришлось довольствоваться только изучением свойств земной атмосферы на различных высотах. При этом из-за отказа клапана шар поднялся выше облаков на незапланированную высоту 3,5 километра, но, увы, затмение уже закончилось. Менделеев сумел исправить клапан и благополучно приземлиться на расстоянии 100 километров от точки старта.

Этот штрих менделеевской биографии иллюстрирует его необычайную смелость, проявившуюся не только в подвиге создания периодической таблицы. Менделеев был смел и принципиален во всех своих делах, в том числе и в отношениях с «властями предержащими». В конце XIX века в России властями стала проводиться политика «укрепления дисциплины и правопорядка» в обществе и прежде всего в университетах, где студенческая молодежь стала стремиться к реформам образования. Менделеев несколько раз обращался в «инстанции», заступаясь за исключаемых из университета «бунтовщиков».

Результатом стало его увольнение из университета и отставка из почти всех комиссий, в которых он деятельно участвовал. Два раза Менделееву было отказано в избрании членом Российской академии наук, хотя он был уже членом нескольких десятков престижных академий и научных обществ всего мира. Дважды правительство настояло на отзыве представлений Менделеева на награждение Нобелевской премией, сделанных видными российскими химиками. И это, безусловно, повлияло на нобелевский комитет, так и не удостоивший Менделеева этой награды, к недоумению всего мирового химического сообщества.

Важное место в жизни Менделеева в то время занимали еженедельные вечера, где собирались коллеги и друзья, в том числе художники И.Е.Репин, А.И.Куинджи, И.И.Шишкин и другие передвижники. В этом салоне непринужденно обсуждались все события научной и политической жизни общества. Жена Менделеева демонстративно не принимала участия в этих встречах. Семейные отношения становились все более сложными и безысходными. В конце 1876 года 42-летний Менделеев на одном из своих салонных вечеров знакомится с 16-летней Анной Ивановной Поповой (1860–1942).

Молодая девушка выбрала необычную для того времени судьбу. Выросши в старозаветной семье донского казацкого атамана, она каким-то образом восприняла передовые идеи нарождавшейся русской интеллигенции, выбрав для себя путь просвещения народа. Тайно от отца (но с материнского благословления) она уехала в столицу, чтобы учиться на женских курсах (прообразе знаменитых «бестужевских курсов» – первого женского университета России). Она училась живописи, была принята в менделеевском салоне, чувствовала себя в нем свободно и непринужденно и, конечно, не могла не обратить внимания на его главу – знаменитого химика. И ни всемирная слава Менделеева, ни 26-летняя разница в возрасте не помешали ей наряду с безмерным уважением почувствовать любовь. А Дмитрий Иванович не мог не интересоваться Анечкой, как ее стали называть в салоне. Не желая быть причиной разрушения семьи, Аня «сбежала» в Италию. Узнав об отъезде, Менделеев бросил все и уехал вслед за Анной. Через месяц они возвратились вместе.

После развода с первой женой жизнь Менделеева резко изменилась. Анна Ивановна была внимательной и заботливой женой и разделяла все взгляды своего мужа. В этом браке родилось четверо детей. Неподалеку от загородного подмосковного дома Менделеева была деревня Шахматово, где в летнее время жила семья дочери ректора Петербургского университета ботаника А.Н.Бекетова большого друга Д.И.Менделеева. И там познакомились старшая дочь Менделеева Любовь Дмитриевна и внук Бекетова, Александр Александрович Блок, будущий великий русский поэт. Они стали мужем и женой.

В биографии многих знаменитых людей вплетаются и анекдотические истории. Присутствуют они и в биографии Менделеева. О легенде открытия, сделанного во сне, уже упоминалось. Другая притча о Менделееве – об изобретении им, якобы, русской сорокаградусной водки. На самом деле введение государственного акциза на водку произошло еще в 1844 году, когда Менделееву не исполнилось и десяти лет. Впоследствии Менделеев много занимался теорией растворов. Этому была посвящена его докторская диссертация, в которой он установил, что существует некоторое оптимальное соотношение смешивания различных жидкостей, при котором плотность смеси максимальна. Но для этилового спирта и воды это было вовсе не 40%, а совершенно другая величина – две части спирта на одну часть воды, что безусловно не годилось для народного алкогольного продукта. А во Франции именно это соотношение было принято, на основе работ Менделеева, для французского абсента – смеси этилового спирта с настойкой из 14 трав.

Но вот рассказы о Менделееве, как об известном мастере чемоданного дела, имели реальное основание. Еще в самом начале своей педагогической деятельности в Симферополе и Одессе его материальное положение было весьма тяжелым. И Менделеев нашел способ его поправить. Он изобрел особый лак, который делал фибровую основу чемодана очень прочной и в то же время легкой. Но кроме этого такой чемодан выглядел как очень дорогое кожаное изделие. Впоследствии это умение стало «хобби» ученого. Он с удовольствием отдыхал, делая чемоданы и раздаривая их знакомым.

Однако самым хорошим отдыхом для Дмитрия Ивановича были шахматы. На своих домашних вечерах он большую часть времени проводил за шахматной доской, что не мешало ему участвовать в интересных беседах. А игроком он был очень сильным.

Невозможно охарактеризовать деятельность Дмитрия Ивановича Менделеева и его достижения одним, даже самым емким определением. Химик Л.А.Чугаев в 1907 году написал о Менделееве так:

«Знаменитый химик, первоклассный физик, плодотворный исследователь в области термодинамики, гидродинамики, метеорологии, геологии, в различных отделах химической технологии и других сопредельных с химией дисциплин, глубокий знаток химической промышленности и промышленности вообще, особенно русской, оригинальный мыслитель в области учения о народном хозяйстве, государственный ум, которому, к сожалению, не суждено было стать государственным человеком, но который видел и понимал задачи и будущность России лучше представителей нашей официальной власти».

Портрет Д.И.Менделеева в мантии доктора права Эдинбургского университета, написанный И.Е.Репиным (1885 г.)

Дмитрий Иванович работал до последнего дня. Он скончался от воспаления легких 20 января 1907 года. Память о Менделееве сохраняется в названиях городов и поселков, многих географических и астрономических объектов и в многочисленных памятниках. А на мемориальном камне его могилы на Волковом кладбище Санкт-Петербурга достаточными оказались всего лишь три слова «Дмитрий Иванович Менделеев».

Элементарное доказательство закона больших чисел

Д.ЧИБИСОВ

1. Введение

Закон больших чисел (далее ЗБЧ) – фундаментальный закон теории вероятностей (далее ТВ), связывающий математическое понятие вероятности с явлениями реальной жизни. Первоначальное развитие ТВ связано с практикой азартных игр. Например, в игре двух игроков с двумя равновероятными исходами ставки игроков, естественно, должны быть равны. (Обычно в ТВ такая игра иллюстрируется бросанием монеты, но практически это может быть чет-нечет в рулетке или игра фараон, описанная в «Пиковой даме», и т.п.) А предположим, я играю на то, что число очков, которое выпадет при бросании игральной кости, делится на 3. Какова будет справедливая ставка? Поскольку я выигрываю в 2 случаях из 6 возможных, то вероятность моего выигрыша равна $\frac{1}{3}$. Нетрудно понять, что справедливая ставка должна быть 2 руб. против моего 1 руб. Действительно, тогда в большой серии игр я выигрываю по 2 руб. в примерно $\frac{1}{3}$ игр, т.е. по $\frac{2}{3}$ в среднем на игру, а мой оппонент – по 1 руб. в $\frac{2}{3}$ игр, т.е. те же $\frac{2}{3}$ на игру.

Обратим внимание на последнюю фразу, в которой подразумевается, как само собой разумеющееся, что относительная частота события должна быть приближенно равна его вероятности. Эта закономерность, которую можно назвать «эмпирическим законом больших чисел», была особенно хорошо известна заядлым игрокам, быстро улавливавшим отклонения от нее и искавшим их причину либо в собственном неправильном подсчете вероятности, либо в шулерстве оппонента.

С развитием ТВ встала задача вывести этот закон из принципов, лежащих в основе ТВ (о которых будет рассказано ниже). Это, с одной стороны, дало бы закону научное обоснование, а с другой – подтвердило бы правильность положений, лежащих в основе самой ТВ, тем, что вытекающие из них следствия соответствуют реальности.

Доказательство ЗБЧ было дано швейцарским математиком Яковом Бернулли в книге «Искусство предположений» («Ars Conjectandi»), опубликованной в 1713 году (см. [1]).

Впоследствии ЗБЧ сыграл важную роль, например, в возникновении генетики, когда из соотношения частот наследования признаков в опытах Менделя, близкого к 3:1, было сделано предположение, что признаки наследуются с вероятностями $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$, и объяснение механизма этого явления составило один из законов Менделя.

В настоящей статье мы приводим элементарное доказательство ЗБЧ, близкое к доказательству Я.Бернулли, во всяком случае, не использующее никаких полученных позднее результатов. В учебнике [2] (как и во всех современных курсах ТВ) ЗБЧ доказывается с помощью неравенства Чебышёва, но оно было открыто в XIX веке, а интерес данной статьи – доказательство средствами, доступными Бернулли.

Мы не предполагаем от читателя *никаких* познаний в ТВ. Все, что нужно, будет сформулировано и получено в последующих разделах. Для доказательства ЗБЧ в

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190502

п. 3 будет выведено *биномиальное распределение вероятностей*. Предварительно, в п.2, мы выведем формулу для *биномиальных коэффициентов*, входящих в выражения для биномиальных вероятностей. Их наглядное представление дается с помощью *треугольника Паскаля* (французский математик, 1623–1662).

2. Треугольник Паскаля и биномиальные коэффициенты

Треугольник Паскаля (см. рисунок) – это таблица, которая строится по следующему правилу. В вершине таблицы и в начале и конце каждой строки стоят единицы, а каждое число внутри таблицы

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

. . . .

равно сумме двух чисел, стоящих над ним. Вам, конечно, знакомы выражения $a+b$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Тогда вы увидите, что числа в 1-й, 2-й и 3-й строках таблицы (вершина не в счет, считаем ее 0-й строкой) – это в точности коэффициенты, входящие в эти выражения. А если не поленитесь выписать разложения для $(a+b)^4$ и $(a+b)^5$, то увидите, что коэффициенты при произведениях a и b в разных степенях снова даются числами из треугольника Паскаля. Примем для них обозначение C_n^k – это число, стоящее на k-м месте в n-й строке[2] (снова считая, что единица в начале строки стоит на 0-й позиции). Например, $C_3^0 = C_3^3 = 1$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$. Легко видеть также, что $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $n = 1, 2, \ldots$

Пользуясь этим обозначением, правило построения треугольника Паскаля можно записать в виде

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

С помощью рекуррентного соотношения (1) докажем, что числа C_n^k, возникающие в треугольнике Паскаля, действительно являются биномиальными коэффициентами, т.е. коэффициентами в выражениях для степеней $(a+b)^n$ бинома $a+b$. Понятно, что такое выражение имеет вид

$$(a+b)^n = a^n + B_n^1 a^{n-1} b + \ldots + B_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n, \quad (2)$$

где B_n^k – некоторые коэффициенты, про которые мы хотим доказать, что $B_n^k = C_n^k$. (Удобно заметить, что верхний индекс при B равен степени b в том же слагаемом.)

Доказательство будет проводиться методом математической индукции. Выше мы убедились, что наше утверждение верно при $n = 1$ и 2. Предположим теперь, что оно доказано для всех степеней до $n-1$ включительно, и докажем, что тогда оно верно и для степени n, т.е. что в разложении (2) $B_n^k = C_n^k$. Поскольку $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$, посмотрим, как слагаемое $B_n^k a^{n-k} b^k$ в (2) происходит из слагаемых в аналогичном (2) разложении для степени $n-1$ при умножении на $a+b$. Оно получается при умножении на a слагаемого, содержащего на единицу меньшую степень a, т.е. $a^{n-k-1}b^k$, и точно так же при умножении на b слагаемого, содержащего b^{k-1}, т.е. $a^{n-k}b^{k-1}$. Указанные степени входят с коэффициентами B_{n-1}^k и B_{n-1}^{k-1} соответственно, но по предположению индукции $B_{n-1}^k = C_{n-1}^k$ и $B_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$. Поэтому из сказанного следует, что $B_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, а тогда согласно (1) $B_n^k = C_n^k$, что и требовалось.

Теперь получим явную формулу для C_n^k. Точнее, выпишем ее и докажем, что она действительно дает выражение для C_n^k. А именно, утверждается, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}. \quad (3)$$

---

[1] Те, кто знаком с началами комбинаторики, знают, что C_n^k – это число сочетаний из n по k, но здесь комбинаторные методы не используются.

Используя широко применяемое в математике обозначение $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ (читается «n факториал») и умножая числитель и знаменатель на $(n-k)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)$, получаем эквивалентное выражение

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Для доказательства этого равенства убедимся сначала, что числа, стоящие в начальных строках треугольника Паскаля, выражаются этой формулой. По формуле (4) находим

$$C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2,\ C_3^1 = \frac{3!}{1!2!} = 3,$$

$$C_4^1 = \frac{4!}{1!3!} = 4,\ C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Кроме того, $C_3^2 = C_3^1 = 3$ и $C_4^3 = C_4^1 = 4$, потому что соответствующие выражения отличаются только перестановкой множителей в знаменателе. Полученные числа совпадают со значениями в треугольнике Паскаля. Далее для доказательства по индукции покажем, что C_n^k выражается формулой (4), в предположении, что эта формула верна для C_{n-1}^k.

Действительно, пользуясь соотношением (1), имеем

$$C_n^k \overset{(1)}{=} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

что и требовалось доказать.

Определение $n!$ расширяют, формально полагая $0! = 1$. Тогда $C_0^0 = C_n^0 = 1$, что позволяет распространить формулу (4) на крайние элементы треугольника Паскаля.

В следующем разделе вводятся вероятностные понятия, необходимые для доказательства ЗБЧ.

3. Схема Бернулли и биномиальное распределение

Схемой Бернулли (или *испытаниями Бернулли*) называют случайный эксперимент, состоящий в проведении n независимых повторных испытаний (игр, опытов, наблюдений) с двумя исходами, имеющими в этих испытаниях одни и те же вероятности.

Чтобы отвлечься от конкретики, считаем, что в каждом испытании происходит один из исходов 1 или 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно (исход 1 будем называть «успехом»). В результате n испытаний возникает цепочка $x_1, \ldots, x_n$, в которой $x_k = 1$ или 0 в зависимости от исхода k-го испытания. Например, исходами четырех испытаний могут быть $(0,0,0,1)$ или $(1,1,0,1)$ и т.п. Каждую такую цепочку будем называть «элементарным исходом». Каждый элементарный исход (цепочка из нулей и единиц) может рассматриваться как запись некоторого n-значного числа в двоичной системе, откуда понятно, что число всевозможных элементарных исходов равно 2^n.

Событием называется любое множество элементарных исходов, а *вероятность события* равна сумме вероятностей составляющих его элементарных исходов. Далее, *случайной величиной* называется любая численная величина, значение которой определяется элементарным исходом. Иначе говоря, случайная величина это функция на множестве элементарных исходов. В связи с ЗБЧ нас будет в первую очередь интересовать случайная величина S_n, равная числу успехов в n испытаниях, и ее распределение вероятностей, т.е. набор вероятностей $P(S_n = k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (вероятности принято обозначать буквой P от англ. *probability*). Указанная вероятность равна сумме вероятностей элементарных исходов, имеющих в своем составе k единиц и $n - k$ нулей.

Подсчитаем вероятность такого события. Начнем с простого примера. Возможными исходами двух испытаний являются $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ и $(0,0)$. *Независимость* испытаний означает, что вероятность совместного наступления каких-либо исходов двух испытаний равна произведению вероятностей наступления этих исходов в каждом из испытаний. Напомним, что исход 1 в каждом испытании происходит с вероятностью p и исход 0 – с вероятностью $q = 1 - p$. Поэтому перечисленные исходы двух испытаний происходят с вероятностями p^2, $pq = qp$ и q^2. Точно так же вероятность произвольного элементарного исхода, содержащего k единиц и $n - k$ нулей, равна $p^k q^{n-k}$.

Таким образом, элементарные исходы, входящие в событие $\{S_n = k\}$, имеют одну и ту же вероятность, равную $p^k q^{n-k}$, и остается подсчитать число этих элементарных исходов.

Покажем, что это число равно биномиальному коэффициенту C_n^k. Давайте выпишем разложение для $(a+b)^n$, не приводя подобные члены, не пользуясь перестановочностью произведения и не записывая произведения одинаковых сомножителей в виде степеней. Например,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb.$$

Аналогично,

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b) = aaa + aba + \ldots$$

При увеличении степени на 1 число слагаемых будет удваиваться, для n-й степени их будет 2^n и они будут образовывать такие же цепочки из букв a и b, как наши элементарные исходы – из единиц и нулей. Поэтому число элементарных исходов, содержащих k единиц и $n - k$ нулей, будет равно числу слагаемых в разложении для $(a+b)^n$, содержащих k множителей a и $n - k$ множителей b, а как мы видели раньше, это число после приведения подобных членов и есть биномиальный коэффициент C_n^k.

С учетом сказанного получаем, что

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (5)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1,$$

поскольку, с одной стороны, это вероятность для S_n принять любое из своих возможных значений, а с другой стороны, эта сумма представляет собой биномиальное разложение для $(p+q)^n = 1$.

Итак, мы заготовили весь вероятностный аппарат, необходимый нам для доказательства ЗБЧ, которое будет проведено в следующем разделе.

4. Закон больших чисел

Как уже говорилось, этот закон гласит, что *относительная частота* успехов S_n/n приближается к вероятности успеха p при росте числа испытаний n. Точное вероятностное выражение этого утверждения дается формулой:
для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty. \quad (6)$$

Для всякого события A вероятность *противоположного* события $\overline{A}$, т.е. события, состоящего в невыполнении события A, равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. В данном случае событие, противоположное событию под знаком вероятности в (6), состоит в выполнении противоположного неравенства. Поэтому ЗБЧ эквивалентен утверждению

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (7)$$

Наглядный смысл утверждения (6) состоит в том, что при больших n относительная частота S_n лежит в окрестности вероятности p с большой (близкой к 1) вероятностью, а утверждения (7) – что S_n выпадает из этой окрестности с малой вероятностью. Эти утверждения эквивалентны и доказывать можно любое из них.

Мы докажем утверждение (7) в простейшем случае, при $p = \frac{1}{2}$.

Теорема. *В схеме Бернулли с равновероятными исходами, когда* $p = q = \frac{1}{2}$, *для любого* $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \ge \varepsilon\right) \to 0 \textit{ при } n \to \infty. \quad (8)$$

Доказательство. По формуле (5) вероятность получения k успехов в n испытаниях в нашем случае, когда $p = \frac{1}{2}$, равна

$$P(S_n = k) = C_n^k \cdot \frac{1}{2^n},$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (9)$$

Событие под знаком вероятности в (8) происходит тогда, когда S_n равно какому-нибудь из чисел k таких, что

$$\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon . \qquad (10)$$

Поэтому вероятность в (7) равна сумме вероятностей (9) по всем таким k, и для доказательства теоремы надо показать, что эта сумма стремится к 0 при $n \to \infty$.

Множество значений k, удовлетворяющих (10), распадается на два множества: множество $K_{n,\varepsilon}$, состоящее из тех k, для которых

$$\frac{k}{n}-\frac{1}{2} \leq -\varepsilon ,$$

$$\text{т.е. } 0 \leq k \leq \frac{n}{2}-n\varepsilon = n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right), \qquad (11)$$

и множество $K'_{n,\varepsilon}$ тех k, для которых

$$\frac{k}{n}-\frac{1}{2} \geq \varepsilon ,$$

$$\text{т.е. } n \geq k \geq \frac{n}{2}+n\varepsilon = n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right). \qquad (12)$$

Ввиду симметрии биномиального распределения (9) попадание S_n в каждое из этих множеств происходит с равными вероятностями, поэтому будем доказывать, что сумма вероятностей (9) по k, принадлежащим множеству $K_{n,\varepsilon}$, иначе говоря, удовлетворяющим неравенству (11), стремится к нулю.

Множество $K_{n,\varepsilon}$ имеет вид

$$K_{n,\varepsilon} = \{0, 1, \ldots, k_{n,\varepsilon}\}, \quad k_{n,\varepsilon} = \left[n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right] \qquad (13)$$

($[a]$ обозначает *целую часть* числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a, например $[2] = 2$, $[1{,}4] = 1$). В силу сказанного требуемое соотношение, из которого будет следовать теорема, имеет вид

$$P\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2} < -\varepsilon\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k_{n,\varepsilon}} C_n^k \to 0$$

$$\text{при } n \to \infty \qquad (14)$$

(напомним, что согласно (9) биномиальные вероятности при $p = \frac{1}{2}$ равны $C_n^k/2^n$).

Предположим, что n нечетно (потом рассмотрим и четные n). В этом случае n-я строка треугольника Паскаля распадается на две симметричные части, например, 3-я строка – на 1, 3 и 3, 1, 5-я строка – на 1, 5, 10 и 10, 5, 1 и т.д. В общем случае такая «полустрока» содержит биномиальные коэффициенты C_n^k с $k = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, всего $\frac{n+1}{2}$ членов.

Как уже отмечалось, сумма биномиальных коэффициентов (элементов треугольника Паскаля) по n-й строке равна 2^n. Соответственно, сумма биномиальных вероятностей (9) по строке равна 1, а сумма этих же вероятностей по полустроке равна $\frac{1}{2}$, т.е.

$$P\left(\frac{S_n}{n} < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_n^k = \frac{1}{2}. \qquad (15)$$

Для доказательства (14) мы оценим отношение последнего слагаемого в сумме в (14), отвечающего $k = k_{n,\varepsilon}$, к последнему слагаемому в сумме в (15), отвечающему $k = \frac{n-1}{2}$, затем отношение предпоследнего слагаемого $\left(k = k_{n,\varepsilon}-1\right)$ в (14) к предпоследнему слагаемому в (15) $\left(k = \frac{n-1}{2}-1\right)$, затем отношение 3-х, 4-х слагаемых и т.д. Обнаружится, что эти отношения при всех $k = 0, 1, \ldots, k_{n,\varepsilon}$ ограничены одним и тем же числом, зависящим от n и ε, которое стремится к нулю при каждом $\varepsilon > 0$, когда $n \to \infty$.

Заметим, что число слагаемых в сумме (14) меньше, чем в сумме (15). Поэтому наш процесс сравнения слагаемых остановится на каком-то положительном значении k, которое мы не будем конкретизировать. Будем называть сумму от этого значения до $k = \frac{n-1}{2}$ (как в (15)) неполной суммой (15). В нее входит столько же слагаемых, как и в (14), и численное значение ее (с учетом множителя $\frac{1}{2^n}$) меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, отношение суммы (14) к неполной сумме ограничено тем же числом, стремящимся к нулю при $n \to \infty$, а поскольку неполная сумма вероятностей (15) меньше $\frac{1}{2}$, сумма вероятностей (14) стремится к нулю.

Итак, выпишем отношение последней в сумме (14) вероятности, отвечающей $k = k_{n,\varepsilon}$, к последней в (15) вероятности, отвечающей $k = \frac{n-1}{2}$. Поскольку по формуле (9) множитель $\frac{1}{2^n}$ у них общий, это отношение по формуле (4) равно

$$\frac{C_n^{k_{n,\varepsilon}}}{C_n^{(n-1)/2}} = \frac{n!}{k_{n,\varepsilon}!\left(n-k_{n,\varepsilon}\right)!} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{n!}. \quad (16)$$

Само собой, $n!$ сокращается, а остальное запишем как произведение двух дробей, которые будем оценивать. А именно,

$$\frac{C_n^{k_{n,\varepsilon}}}{C_n^{(n-1)/2}} = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{k_{n,\varepsilon}!} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{\left(n-k_{n,\varepsilon}\right)!} = \frac{A}{B} \quad (17)$$

(т.е. A обозначает первую дробь, а B – обратную ко второй). Поскольку $k_{n,\varepsilon} = \left[n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right] < \frac{n-1}{2}$ (так как при достаточно больших n имеем $\varepsilon n > \frac{1}{2}$), числитель в A «длиннее», чем знаменатель, поэтому после сокращения множителей, входящих в $k_{n,\varepsilon}!$, получаем

$$A = \left(k_{n,\varepsilon}+1\right)\left(k_{n,\varepsilon}+2\right)\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{2}. \quad (18)$$

Точно так же

$$B = \frac{(n+3)}{2}\cdot\frac{(n+5)}{2}\cdot\ldots\cdot\left(n-k_{n,\varepsilon}\right). \quad (19)$$

Теперь мы воспользуемся простым соотношением, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Для любых* $0 < a < b$, $c > 0$ *имеем*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}.$$

Доказательство предоставляем читателю (приведите к общему знаменателю и сравните числители). Мы только проиллюстрируем это на простом примере: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} < \frac{5}{9}$.

Согласно (18) и (19), отношение $\frac{A}{B}$ представляется в виде произведения дробей

$$\frac{A}{B} = \frac{k_{n,\varepsilon}+1}{\frac{n+3}{2}} \cdot \frac{k_{n,\varepsilon}+2}{\frac{n+5}{2}} \cdot\ldots\cdot \frac{\frac{n-1}{2}}{n-k_{n,\varepsilon}}. \quad (20)$$

Каждая последующая дробь отличается от предыдущей прибавлением единицы в числителе и знаменателе, поэтому по лемме они возрастают, так что наибольшая из них – последняя, следовательно, $\frac{A}{B}$ не превосходит этой последней дроби $\frac{(n-1)/2}{n-k_{n,\varepsilon}}$, возведенной в степень, равную числу сомножителей в (20).

Оценим эту последнюю дробь. Очевидно, что для всякого $0 < a < n$

$$[a] \le a, \quad n-[a] \ge n-a, \quad \frac{1}{n-[a]} \le \frac{1}{n-a}. \quad (21)$$

Поэтому

$$\frac{\frac{n-1}{2}}{n-k_{n,\varepsilon}} = \frac{\frac{n-1}{2}}{n-\left[n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right]} \le \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+n\varepsilon} = \frac{1}{1+2\varepsilon}. \quad (22)$$

Оценим теперь число сомножителей в (20). Оно равно числу множителей в (18), образующих A, а это есть число множителей, оставшихся от деления $\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ на $k_{n,\varepsilon}!$, и оно равно $\frac{n-1}{2} - k_{n,\varepsilon}$. Пользуясь аналогом второго неравенства в (21), получаем

$$\frac{n-1}{2} - k_{n,\varepsilon} = \frac{n-1}{2} - \left[\frac{n}{2} - n\varepsilon\right] \ge$$

$$\ge \frac{n-1}{2} - \frac{n}{2} + n\varepsilon = n\varepsilon - \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Итак, из (22), (23) и сказанного выше об оценке $\dfrac{A}{B}$ следует, что

$$\frac{A}{B} \le \left(\frac{1}{1+2\varepsilon}\right)^{n\varepsilon - \frac{1}{2}}. \qquad (24)$$

Напомним, что этим самым мы оценили отношение «крайней правой» биномиальной вероятности в сумме (14) к «крайней правой» вероятности в сумме (15). Теперь сделаем шаг влево и оценим отношение предпоследних вероятностей в этих суммах. Аналогично (16), (17) это отношение равно

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{C_n^{k_{n,\varepsilon}-1}}{C_n^{(n-3)/2}} = \frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{\left(k_{n,\varepsilon}-1\right)!} \cdot \frac{\left(\frac{n+3}{2}\right)!}{\left(n-k_{n,\varepsilon}+1\right)!}. \qquad (25)$$

Аналогично (18) имеем

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_{n,\varepsilon}}{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{k_{n,\varepsilon}+1}{\frac{n+3}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{n-3}{2}}{n-k_{n,\varepsilon}-1}. \qquad (26)$$

Каждая дробь в (26) отличается от соответствующей дроби в (20) вычитанием 1 в числителе и знаменателе. По той же лемме получаем, что

$$\frac{A_1}{B_1} \le \frac{A}{B} \le \left(\frac{1}{1+2\varepsilon}\right)^{n\varepsilon - \frac{1}{2}}.$$

То же самое произойдет и при всех последующих шагах влево: отношение соответствующих биномиальных вероятностей будет при каждом шаге уменьшаться и оставаться ограниченным той же величиной

$$\left(\frac{1}{1+2\varepsilon}\right)^{n\varepsilon - \frac{1}{2}} = (1+2\varepsilon)^{-1/2}\left[\left(\frac{1}{1+2\varepsilon}\right)^{\varepsilon}\right]^{n}. \qquad (27)$$

Поэтому интересующая нас сумма биномиальных вероятностей в (14) не превосходит неполной суммы вероятностей (15), меньшей $\dfrac{1}{2}$, умноженной на верхнюю границу (27). Последняя представлена в (27) в виде произведения постоянного числа (не зависящего от n) и члена геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, который, как известно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Тем самым, теорема доказана в предположении, что n нечетно.

Для доказательства теоремы в случае четного n нужно центральное значение в треугольнике Паскаля просто выбросить и рассматривать биномиальные вероятности, отвечающие остальным значениям. Тогда сумма биномиальных вероятностей по неполной полустроке меньше $\dfrac{1}{2}$, что нисколько не мешает получению стремящейся к нулю верхней границы. Доказательство, повторяющее проведенное выше, предоставляем читателю.

Литература

1. *Я.Бернулли.* О законе больших чисел. – М.: Наука, 1986.

2. *Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко.* Теория вероятностей и статистика. – М.: МЦНМО, 2014.

16 апреля 2019 года после тяжелой продолжительной болезни ушел из жизни Владимир Григорьевич Болтянский, известный математик и выдающийся автор научно-популярных трудов по математике. Владимир Григорьевич все время был рядом с «Квантом»: с первого выпуска до 1990 года – член редакционной коллегии, а далее – член редакционного совета. В «Кванте» опубликовано более 30 статей В.Г.Болтянского, а его замечательные книги, такие как «Выпуклые фигуры» (в соавторстве с И.М.Ягломом), вот уже многие годы помогают школьникам и студентам вырасти в ученых. Вклад Владимира Григорьевича в математическое образование трудно переоценить.

Предлагаем вниманию читателей статью В.Г.Болтянского, впервые опубликованную в нашем журнале в 4-м номере за 1973 год.

Владимир Григорьевич Болтянский (26.04.1925–16.04.2019)

О вращении отрезка

В.БОЛТЯНСКИЙ

1. Ясно, что отрезок длины 1 может совершить полный оборот, все время находясь в фигуре площади $\pi/4$, а именно в круге диаметра 1 (рис.1). А не может ли отрезок длины 1 совершить полный оборот, двигаясь в фигуре меньшей площади? На первый взгляд это кажется маловероятным: похоже, что круг диаметра 1 является наиболее «экономной» (в смысле площади) фигурой, в которой отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Однако это неверно!

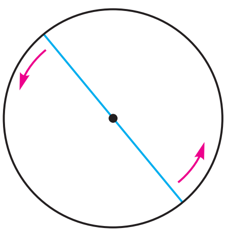


Рис. 1

В 1918 году А.С.Безикович доказал, что существует фигура сколь угодно малой площади, двигаясь в которой отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Точнее говоря, *если мы зададим любое положительное число* ε (например, $\varepsilon = 0{,}000001$), *то сможем построить фигуру площади* ε, *внутри которой может совершить полный оборот отрезок длины* 1. Безикович предложил простые геометрические идеи, с помощью которых можно доказать этот удивительный факт. Однако для того, чтобы превратить эти идеи в полное доказательство, ему пришлось провести довольно громоздкие вычисления, так что все рассуждение в целом оказалось сложным (доказательство, похожее на доказательство Безиковича, приведено на стр.258–263 книги И.М.Яглома и В.Г.Болтянского «Выпуклые фигуры»).

Не так давно академик И.М.Виноградов рассказал мне короткое и элегантное доказательство этой теоремы. Это доказательство он придумал сразу же после того, как Безикович рассказал ему о своей теореме, однако печатать его не стал. С любезного согласия И.М.Виноградова я приведу здесь его доказательство.

2. Прежде всего рассмотрим геометрические идеи А.С.Безиковича.

Ясно, что достаточно построить фигуру маленькой площади, внутри которой отрезок длины 1 можно повернуть на угол 60°: прикладывая тогда друг к другу три такие фигуры, получим фигуру, внутри которой можно будет повернуть отрезок на угол 180° .

Поворот отрезка длины 1 на 60° можно совершить внутри равностороннего треугольника с высотой 1 (рис.2). Разрежем теперь этот треугольник высотой на две части и наложим эти части друг на друга. Внутри получившейся фигуры (рис.3) можно отрезок AB повернуть в положение AC; кроме того, отрезок DE, параллельный AC, можно повернуть в положение DF. Но переместить отрезок AB в положение DF в этой фигуре не удастся: можно повернуть отрезок в положение AC, а «перепрыгнуть» в положение DE нельзя! Однако можно поступить так. Добавим к фигуре, изображенной на рисунке 3, отрезки AH и DH и сектор радиуса 1 с центром H, как показано на рисунке 4. В получившейся фигуре уже можно будет повернуть отрезок из положения AB в положение DF: надо будет из положения AC' сдвинуть отрезок вдоль AH в положение HK, затем повернуть его внутри сектора в положение HL, а потом сдвинуть вдоль HD в положение DE.

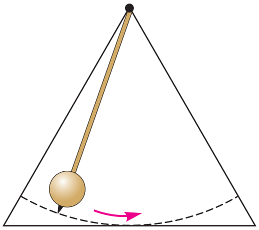


Рис. 2

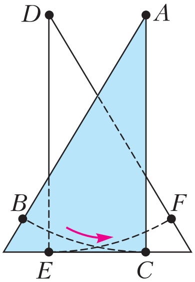


Рис. 3

Что же мы получили в результате? Площадь фигуры, изображенной на рисунке 3, существенно меньше площади первоначального равностороннего треугольника (так как две половинки этого треугольника перекрываются). При переходе же от рисунка 3 к рисунку 4 мы добавляем лишь отрезки AH, DH (они имеют нулевую площадь) и сектор с центром H, причем площадь этого сектора можно сделать как угодно малой (нужно лишь точку H взять далеко, чтобы угол AHD был маленьким).

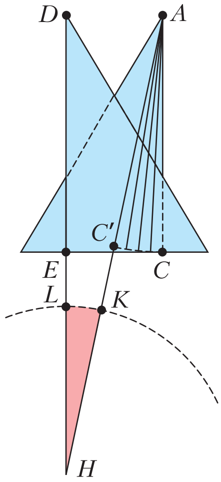


Рис. 4

А что если разрезать равносторонний треугольник не на две, а на четыре части (рис.5)? Тогда, производя параллельные

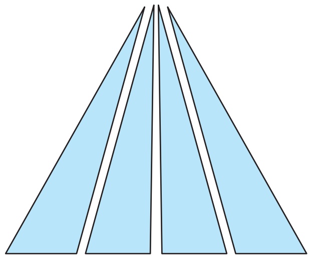


Рис. 5

переносы этих частей (чтобы они перекрывались), мы получим фигуру (рис.6), в которой можно отрезок длины 1 повернуть на угол 15° , затем, «перепрыгнув» в параллельное положение, повернуть еще на 15°, потом еще и еще на 15°. А так как «прыгать» нашему отрезку не разрешается, то придется, как и на рисунке 4, добавить отрезки и секторы (рис.7). В фигуре, изображенной на рисунке 7, отрезок длины 1, непрерывно перемеща-

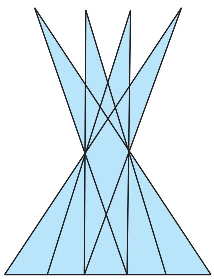


Рис. 6

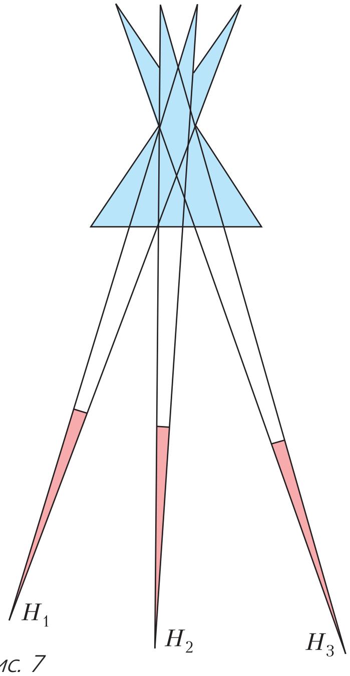


Рис. 7

ясь, может повернуться на угол 60°. При этом сумму площадей добавленных секторов можно сделать как угодно малой (надо лишь взять точки H_1, H_2, H_3 достаточно далеко). В то же время площадь фигуры, изображенной на рисунке 6, значительно меньше площади исходного равностороннего треугольника, поскольку четыре части, на которые разрезан этот треугольник, многократно перекрываются.

Теперь становится понятным общее направление доказательства: *надо разрезать равносторонний треугольник на части отрезками, исходящими из вершины, и произвести параллельные переносы этих частей таким образом, чтобы фигура, покрываемая всеми этими частями, имела площадь, меньшую чем* ε, *где* ε *– данное положительное число.*

3. Изложенные соображения, однако, вовсе еще не дают доказательства. Это только направление, в котором следует его искать. Самое трудное впереди: надо придумать, *как* следует сдвигать части, чтобы за счет многократных перекрытий получилась фигура достаточно малой площади. Способ сдвига частей и подсчета площади, предложенный И.М.Виноградовым, состоит в следующем.

Возьмем произвольное натуральное число m и разобьем основание равностороннего треугольника на 2^m равных частей. Соединив точки деления с вершиной, мы получим разбиение равностороннего треугольника на 2^m частей, которые условимся называть *клиньями*. Проведем, кроме того, прямые, параллельные основанию и разбивающие высоту треугольника на m равных частей; эти прямые обозначим, начиная от вершины, через $l_1, \ldots, l_{m-1}$ (рис.8).

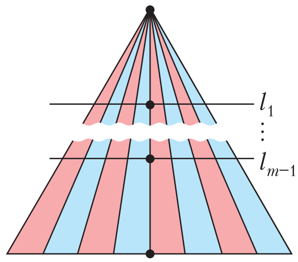


Рис. 8

Рассмотрим два соседних клина. Прямая l_1 высекает в них одинаковые отрезки. Сдвинем эти клинья так, чтобы эти отрезки «перепрыгнули» друг через друга (рис.9), и «склеим» теперь эти два клина, т.е. фигуру, полученную из этих двух клиньев, будем рассматривать как единое целое при всех дальнейших параллельных переносах. Такое склеивание произведем для каждых двух соседних клиньев: 1-й склеим со 2-м, 3-й с 4-м, …, $\left(2^m - 1\right)$-й с 2^m-м.

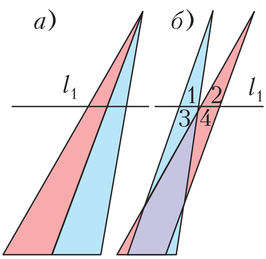


Рис. 9

Фигуру, полученную склеиванием двух клиньев, разобьем на части следующим образом: выделим из нее треугольник с вершиной на прямой l_1 и четыре «хвостика». Каждый из «хвостиков» представляет собой треугольник с высотой $1/m$ (напомним, что высота исходного равностороннего треугольника равна 1). Основание же каждого «хвостика» равно $\dfrac{a}{m\cdot 2^m}$, где $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ – сторона исходного равностороннего треугольника. Следовательно, общая площадь всех четырех «хвостиков» равна $2\cdot\dfrac{a}{m^2\cdot 2^m}$, а так как всего имеется 2^{m-1} пар склеенных клиньев, то общая сумма площадей «хвостиков» равна $\dfrac{a}{m^2}$. Площадь S_1 равностороннего треугольника Δ_1, отсекаемого от исходного треугольника прямой l_1 (рис.10), равна $\dfrac{a}{2m^2}$. Таким образом, общая сумма площадей

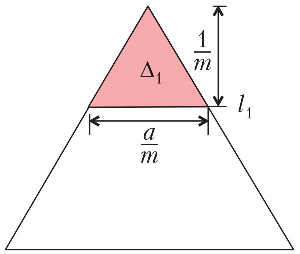


Рис. 10

всех «хвостиков» равна $2S_1$. Выбросим теперь все эти «хвостики» из рассмотрения, запомнив сумму их площадей. При всех дальнейших сдвигах сумма площадей отброшенных «хвостиков» может лишь уменьшиться (за счет перекрытий).

Треугольники, остающиеся после отбрасывания всех «хвостиков» (число этих треугольников равно 2^{m-1}), будем теперь рассматривать как новые клинья. Сдвинув их вместе, получим из этих 2^{m-1} новых клиньев равносторонний треугольник с высотой $1-\dfrac{1}{m}$ (рис.11). Теперь уже не прямая l_1, а прямая l_2 отсекает от него

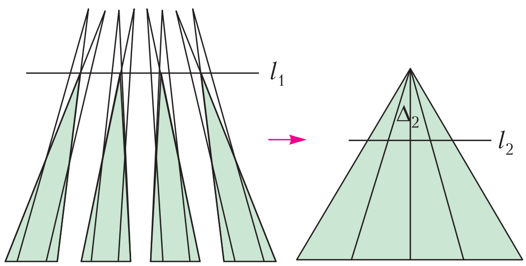


Рис. 11

маленький равносторонний треугольник Δ_2, причем он, очевидно, равен треугольнику Δ_1. Сдвигая и склеивая новые клинья так же, как и раньше, мы опять получим «хвостики», общая сумма площадей которых равна $2S_1$, и «совсем новые» клинья, вершины которых лежат на прямой l_2.

Из этих «совсем новых» клиньев, сдвигая их, получим равносторонний треугольник с высотой $1-\dfrac{2}{m}$, а склеивая «совсем новые» клинья попарно, опять получим «хвостики», сумма площадей которых равна $2S_1$, и т.д.

Проделаем все m шагов такого построения (на последнем m-м шаге получится просто равносторонний треугольник, равный Δ_1, так что ничего и сдвигать не надо). Мы видим, что от первоначальных клиньев после постепенного отрезания «хвостиков» ничего не осталось. Иначе говоря, площадь фигуры, получившейся из первоначальных клиньев после всех сдвигов и склеиваний, меньше общей суммы площадей всех «хвостиков», т.е. меньше чем

$$m\cdot 2S_1=2m\cdot\frac{a}{2m^2}=\frac{a}{m}=\frac{2}{\sqrt{3}m}<\frac{2}{m}.$$

Теперь ясно, что, взяв m достаточно большим, мы сможем сделать эту площадь как угодно малой. Доказательство закончено!

4. И все же, может, интуиция нас не обманывает? Может быть, круг диаметра 1 действительно является наименьшей по площади фигурой, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1, но только не среди любых фигур (как мы видели, это неверно), а среди всех *выпуклых* фигур? Ведь те фигуры достаточно малой площади, о которых шла речь выше (см. рис.7), являются очень «рыхлыми», разбросанными и уж, во всяком случае, невыпуклыми. Напомним, что выпуклой называется такая фигура, которая вместе с каждыми двумя точками целиком содержит и соединяющий их отрезок (рис.12).

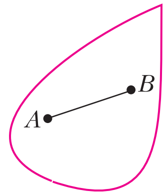


Рис. 12

Так вот, верно ли, что среди всех выпуклых фигур, в которых отрезок длины 1 может совершить полный оборот, круг диаметра 1 имеет наименьшую площадь?

Оказывается, что и это неверно. Поясним, в чем здесь дело. Пусть F – фигура, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1. Возьмем какую-либо прямую l и проведем две *опорные прямые* l_1 и l_2 фигуры F, параллельные l, т.е. две прямые, между которыми «зажата» фигура F (рис.13). Так как отрезок, совершающий в фигуре F полный оборот, должен в какой-то момент занять положение, перпендикулярное прямой l, то расстояние между прямыми l_1 и l_2 (его называют *шириной* фигуры F в направлении, перпендикулярном l) не меньше 1. Итак, ширина фигуры F в любом направлении не меньше 1.

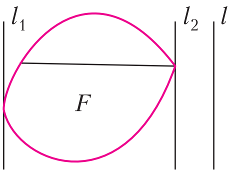


Рис. 13

Кажется вполне естественным предположение, что у фигуры наименьшей площади ширина во всех направлениях должна быть равна 1 (иначе площадь, видимо, можно было бы уменьшить). Посмотрим, к чему приведет нас этот предположение.

Прежде всего возникает вопрос: что собой представляет фигура, у которой во всех направлениях ширина равна 1? Нередко отвечают, что такой фигурой может быть только круг диаметра 1. Однако это неверно! Существует бесконечно много различных фигур, у которых ширина равна 1 во всех направлениях; их называют *фигурами постоянной ширины* 1. На рисунке 14 показаны две такие фигуры. Обе фигуры ограничены дугами окружностей радиуса 1. Из двух параллельных опорных прямых одна проходит через угловую точку, а другая касается дуги окружности, и расстояние между этими прямыми равно 1. Первая из изображенных на рисунке 14 фигур имеет специальное название: *треугольник Рело* (по имени механика, который впервые заинтересовался свойствами этой фигуры и пытался использовать ее при конструировании механизмов).

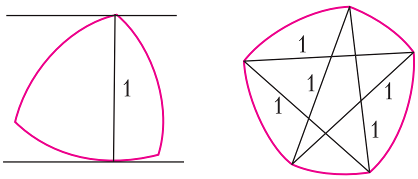


Рис. 14

Фигуры постоянной ширины обладают многими замечательными свойствами. Например, длина кривой, ограничивающей любую фигуру постоянной ширины 1, равна π, т.е. равна длине окружности диаметра 1 (теорема Барбье). Далее, из всех фигур постоянной ширины 1 *наибольшую* (а не наименьшую!) площадь имеет круг, а *наименьшую* площадь имеет треугольник Рело; во всяком случае, нетрудно проверить, что площадь треугольника Рело равна $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \approx 0,7048$ – заметно меньше площади круга, равной $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$. Отметим еще, что две параллельные опорные прямые, проведенные к фигуре постоянной ширины 1, имеют с этой фигурой две общие точки, причем отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен опорным прямым (и, следовательно, имеет длину 1; см. рис.14). Из этого следует, что во всякой фигуре постоянной ширины 1 отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Доказательство сформулированных здесь утверждений можно найти в упоминавшейся выше книге «Выпуклые фигуры» (см. также журнал «Квант», 1971, №3, с.21).

Итак, если бы сделанное выше предположение было верно, то наименьшей (по площади) выпуклой фигурой, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1, был бы треугольник Рело (а вовсе не круг). Но, оказывается (как это на первый взгляд ни кажется странным), что и треугольник Рело не является наименьшей фигурой. Такой наименьшей фигурой служит *равносторонний треугольник с высотой* 1 (его площадь равна $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5773$, т.е. намного меньше площади треугольника Рело). Доказательство этого факта можно найти на с.256–258 книги «Выпуклые фигуры».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2558 – М2561 предлагались на XL Турнире городов.

Задачи Ф2565–Ф2568 предлагались на Инженерной олимпиаде школьников в 2018/19 учебном году. Автор задач – С.Муравьев.

Задачи М2558–М2561, Ф2565–Ф2568

М2558. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

С.Дориченко

М2559. К плоскости приклеены два непересекающихся а) равных; б) не обязательно равных деревянных круга – серый и черный (рис.1). Дан бесконечный

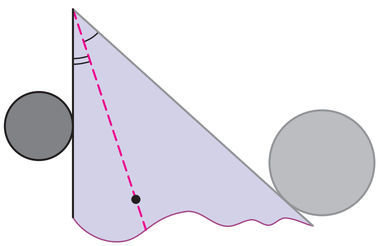


Рис. 1

деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая – черная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причем серая сторона касалась серого круга, а черная – черного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

В.Расторгуев, Е.Бакаев, И.Богданов, П.Кожевников

М2560. Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции:

1) съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами;

2) пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).

Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу.

И.Митрофанов

М2561*. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0; 0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идет по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* – фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

И.Чанакчи, Р.Шиффлер

Ф2565. При исследовании автомобильных пробок инженерам-дорожникам приходится рассчитывать пропускные способности дорог – максимальное количество машин, которые могут проехать по тому или иному участку дороги, – причем исходя из возможностей и предпочтений усредненного водителя. Пусть по прямому участку шоссе движется поток машин. Их скорости одинаковы и не меняются с течением времени. Дан график зависимости скорости v (в километрах в час), с которой едут машины в потоке, от числа машин n, приходящихся на 100 метров дороги (рис.2). Какое максимальное количество

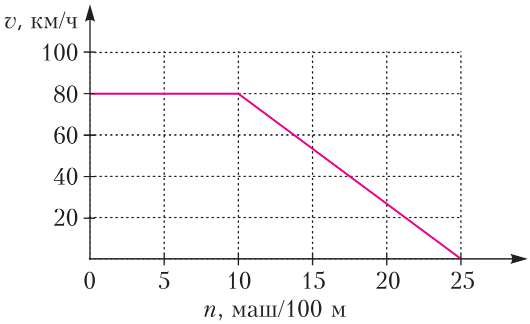


Рис. 2

машин может проехать за 1 час около некоторой отметки на дороге?

Ф2566. В вертикальную плоскую стену вбиты два гладких гвоздя, перпендикулярных стене. На них повесили круглый обруч с равномерным распределением массы по ободу, и он с места не сдвинулся. Положение одного гвоздя известно – оно показано на рисунке 3. Прямой отрезок с концами в центре обруча и в этом гвозде образует с вертикалью угол $\varphi < \pi/2$. Где может находиться второй гвоздь?

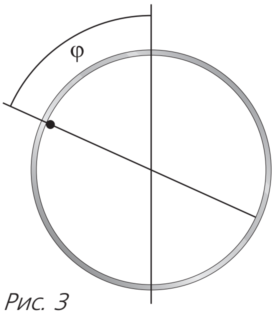


Рис. 3

Ф2567. В секретной лаборатории синтезировали необычный материал. Его удельная теплоемкость c зависит от температуры t в шкале Цельсия по закону $c(t) = c_0(1 + \gamma t)$, где $c_0 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град) и $\gamma = 0{,}05$ град$^{-1}$ – известные постоянные. Образец данного материала массой $m = 0{,}5$ кг и начальной температурой $t_0 = 0$ °C бросают в воду массой $2m$ и температурой $t_1 = 45$ °C. Какая установится температура? Удельная теплоемкость воды $c_{в} = 2c_0 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град). Потерями тепла можно пренебречь.

Ф2568. Имеется плоская металлическая пластинка. Если пластинку расположить перпендикулярно солнечным лучам, то ее освещенная сторона будет иметь температуру $t_1 = 50$ °C, а противоположная сторона – температуру $t_2 = 30$ °C. Какими будут температуры освещенной и теневой сторон, если взять пластинку удвоенной толщины? Считайте, что пластинка очень тонкая и отдает энергию окружающей среде благодаря теплопроводности. Температура окружающей среды $t_0 = 25$ °C.

Указание. В установившемся режиме поток тепла между телами пропорционален разности их температур и площади контакта и обратно пропорционален расстоянию между ними (закон теплопроводности Фурье).

Решения задач М2546–М2549, Ф2553–Ф2556

М2546. *Сумма чисел a, b и c равна* 0. *Докажите, что:*

а) $$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5};$$

б) $$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^7+b^7+c^7}{7}.$$

Возможно, один из самых коротких путей к решению – непосредственная проверка после выражения одной переменной через две другие.

Положим $S_n = \dfrac{a^n + b^n + c^n}{n}$ и подставляем $c = -(a+b)$. Имеем

$$S_2 = \frac{a^2 + b^2 + (a+b)^2}{2} = a^2 + ab + b^2;$$

$$S_3 = \frac{a^3 + b^3 - (a+b)^3}{3} = \frac{-3a^2b - 3ab^2}{3} = -ab(a+b).$$

Используя разложения по биному Ньютона

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

и

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,$$

запишем

$$S_5 = \frac{a^5 + b^5 - (a+b)^5}{5} = -ab\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right);$$

$$S_7 = \frac{a^7 + b^7 - (a+b)^7}{7} = -ab\left(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5\right).$$

Теперь проверим равенства а) и б):

$$S_2S_3 = -ab(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = -ab\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right) = S_5;$$

$$S_2S_5 = -ab\left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right) = -ab\left(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5\right) = S_7.$$

Не нужно думать, что данная задача естественно обобщается. Скажем, равенство $S_2S_7 = S_9$ неверно при $a = b = 1$, $c = -2$.

П.Кожевников

М2547. *Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке T (рис.1). Окружность Ω_3 (с центром O_3) касается внешним образом окружностей Ω_1 и Ω_2, а также касается*

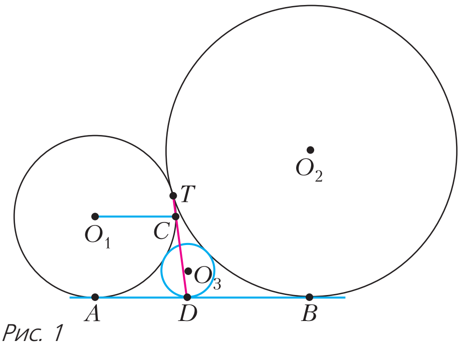


Рис. 1

общей касательной AB, проведенной к Ω_1 и Ω_2, в точке D. Прямая TD вторично пересекает окружность Ω_1 в точке C. Докажите, что $O_1C \parallel AB$.

Если радиусы окружностей равны, то в силу симметрии прямая TD будет являться общей касательной к окружностям; в этом случае доказывать нечего.

Далее предполагаем, что $r_1 < r_2$ (радиус Ω_1 меньше радиуса Ω_2); случай $r_1 > r_2$ аналогичен. Пусть X – точка пересечения O_1O_2 и AB (рис.2). Достаточно доказать,

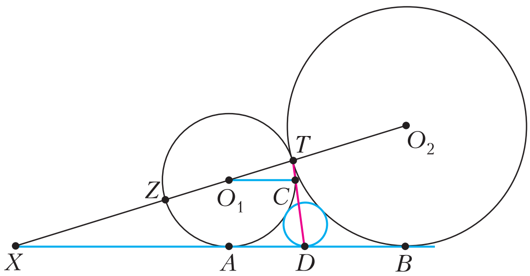


Рис. 2

что $XT = XD$. Действительно, поскольку $O_1T = O_1C = r_1$, то XTD и O_1TC будут являться подобными равнобедренными треугольниками, откуда получаем нужную параллельность $O_1C \parallel AB$.

Показать, что $XT = XD$, можно разными способами (используя теорему о трех гомотетиях, инверсию с центром в X и т.д.). Здесь мы приведем решение, в котором потребуется гомотетия и немного вычислений.

Положим $XA = t$, а отношение радиусов r_2/r_1 окружностей Ω_2 и Ω_1 обозначим через k. Пусть Z – вторая точка пересечения XT и Ω_1. Тогда $XT \cdot XZ = t^2$. С другой стороны, из гомотетии с центром X, переводящей Ω_1 в Ω_2, следует $XZ/XT = r_1/r_2 = 1/k$. Отсюда $XT \cdot (XT/k) = t^2$, значит, $XT = t\sqrt{k}$.

Далее, из гомотетии $XB = k \cdot XA = kt$, отсюда $AB = XB - XA = (k-1)t$. По формуле длины общей касательной между касающимися окружностями $AD = 2\sqrt{r_1 r_3}$ (где r_3 – радиус окружности Ω_3) и, аналогично, $BD = 2\sqrt{r_2 r_3}$. Таким образом, $BD/AD = \sqrt{r_2/r_1} = \sqrt{k}$. Имеем

$$XD = XA + AD = XA + AB \cdot \frac{AD}{AD + BD} =$$

$$= t + t(k-1) \cdot \frac{1}{1+\sqrt{k}} = t + t\left(\sqrt{k} - 1\right) = t\sqrt{k}.$$

Окончательно, $XT = XD = t\sqrt{k}$.

В.Расторгуев, П.Кожевников

M2548*. См. статью В.Брагина «Ряд чисел, обратных к простым».

M2549. *Для каждого натурального n найдите сумму всех n-значных чисел, у которых последовательность цифр в десятичной записи неубывающая.*

Пусть X – множество всех n-значных чисел, у которых последовательность цифр в десятичной записи неубывающая. Идея решения будет заключаться в следующем: мы найдем средние значения (т.е. средние арифметические по числам множества X) $s_1, s_2, \ldots, s_n$ соответственно первой, второй, …, n-й цифры, и тогда ответом в задаче будет являться число $|X| \cdot \left(s_1 \cdot 10^{n-1} + s_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + s_{n-1} \cdot 10 + s_n\right)$, где $|X|$ – количество чисел в множестве X.

Пусть $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ – одно из чисел множества X, положим $1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} = 9$. Числу A поставим в соответствие последовательность $D(A) = (d_1, d_2, \ldots, d_{n+1})$, где $d_i = a_i - a_{i-1}$ (пример – на рисунке 1). Легко видеть, что

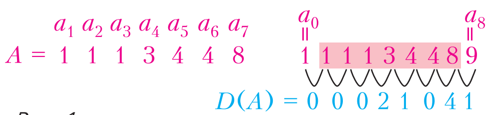


Рис. 1

$D(A)$ – последовательность $n + 1$ целых неотрицательных чисел, сумма которых равна $9 - 1 = 8$. Множество всех таких последовательностей обозначим Y. Из равенств $a_i = 1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_i$ видно, что по каждой последовательности D множества Y однозначно восстанавливается число A из X, т.е. сопоставление $A \to D(A)$ взаимно однозначно.

Рассмотрим некоторую последовательность $D = (d_1, d_2, \ldots, d_{n+1})$ из множества Y вместе со своими циклическими сдвигами:

$D_1 = (d_1, d_2, \ldots, d_{n+1})$,

$D_2 = (d_2, d_3, \ldots, d_{n+1}, d_1)$,

$D_3 = (d_3, \ldots, d_{n+1}, d_1, d_2)$, …

…, $D_{n+1} = (d_{n+1}, d_1, d_2, \ldots, d_n)$

(пример – на рисунке 2). Пусть A_i – число из множества X такое, что $D(A_i) = D_i$.

$D_1 = 00021041$ $A_1 = 1113448$
$D_2 = 00210410$ $A_2 = 1134489$
$D_3 = 02104100$ $A_3 = 1344899$
$D_4 = 21041000$ $A_4 = 3448999$
$D_5 = 10410002$ $A_5 = 2267777$
$D_6 = 04100021$ $A_6 = 1566668$
$D_7 = 41000210$ $A_7 = 5666689$
$D_8 = 10002104$ $A_8 = 2222455$

Рис. 2

Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдем среднее, взятое по числам $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, значение k-й слева цифры. У чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ k-я цифра равна, соответственно, $1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_k$, $1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{k+1}$, … …, $1 + d_{n+1} + d_1 + \ldots + d_{k-1}$; сумма этих цифр равна

$$(n+1) + k(d_1 + d_2 + \ldots + d_{n+1}) = (n+1) + 8k,$$

поэтому среднее значение равно $1 + \dfrac{8k}{n+1}$.

Мы видим, что это значение не зависит от взятой нами вначале последовательности D. На самом деле среди циклических сдвигов $D_1, D_2, \ldots, D_{n+1}$ могут быть повторения: если t – минимальный период циклической последовательности D, то в наборе $D_1, D_2, \ldots, D_{n+1}$ имеется t различных последовательностей, каждая из которых имеет $(n+1)/t$ копий (включая ее саму). Соответственно, в наборе чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ могут быть повторения. Удалив из набора чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ копии, получим множество (из t чисел), которое назовем *орбитой*. Но поскольку для каждого числа из орбиты количество копий одно и то же, среднее значение k-й цифры для чисел из нашей орбиты по-прежнему равно $1+\frac{8k}{n+1}$. Множество X разбивается на непересекающиеся орбиты (в соответствии с разбиением множества Y), поэтому среднее значение (по числам множества X) k-й цифры равно $s_k = 1+\frac{8k}{n+1}$.

Остается завершить вычисления.

Посчитаем количество последовательностей в множестве Y. Заменив в последовательности $D=(d_1, d_2, \ldots, d_{n+1})$ каждое ненулевое d_i на d_i последовательных единиц и ноль, мы получим последовательность из $n+1$ нулей и 8 единиц, в которой последнее число – ноль. Таких последовательностей C_{n+8}^8. По каждой из них однозначно восстанавливается D, поэтому

$$|X| = |Y| = C_{n+8}^8.$$

Теперь свернем сумму:

$$s_1\cdot 10^{n-1}+s_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+s_{n-1}\cdot 10+s_n =$$

$$=\left(1+\frac{8}{n+1}\right)\cdot 10^{n-1}+\left(1+\frac{8}{n+1}\cdot 2\right)\cdot 10^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots+\left(1+\frac{8}{n+1}\cdot(n-1)\right)\cdot 10+\left(1+\frac{8}{n+1}\cdot n\right)=$$

$$=\left(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1\right)+$$

$$+\frac{8}{n+1}\cdot\left(10^{n-1}+2\cdot 10^{n-2}+3\cdot 10^{n-3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(n-1)\cdot 10+n\right).$$

Сумма $10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1$ равна $\frac{10^n-1}{9}$. Далее,

$$10^{n-1}+2\cdot 10^{n-2}+$$

$$+3\cdot 10^{n-3}+\ldots+(n-1)\cdot 10+n=$$

$$=\left(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1\right)+$$

$$+\left(10^{n-2}+10^{n-3}+\ldots+1\right)+\ldots+(10+1)+1=$$

$$=\frac{10^n-1}{9}+\frac{10^{n-1}-1}{9}+\ldots+\frac{10-1}{9}=$$

$$=\frac{10\left(10^n-1\right)}{81}-\frac{n}{9}.$$

Окончательно, искомая сумма равна

$$C_{n+8}^8\cdot\left(\frac{10^n-1}{9}+\frac{8}{n+1}\left(\frac{10\left(10^n-1\right)}{81}-\frac{n}{9}\right)\right).$$

Решение закончено.

Таким же образом можно найти сумму всех n-значных чисел, у которых последовательность цифр в b-ичной записи неубывающая или строго возрастающая.

Данную задачу можно интерпретировать следующим образом: берется случайная ненулевая цифра (т.е. с равной вероятностью это любое число из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}) и такое испытание повторяется n раз. Затем полученный набор цифр упорядочивается по возрастанию, т.е. составляется так называемый *вариационный ряд* $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ – это и есть неубывающая последовательность цифр числа A. В решении нам удается найти *математическое ожидание* для каждого a_i. Этот вопрос можно считать дискретным вариантом классической задачи о нахождении математического ожидания членов вариационного ряда для n независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке (при переводе на геометрический язык эта задача сводится к нахождению центра масс n-мерного симплекса).

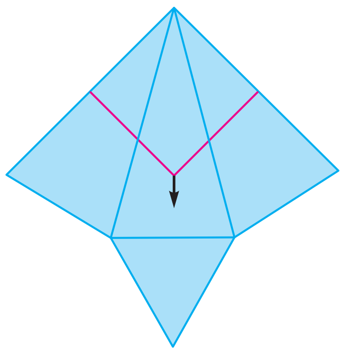
П.Кожевников

Ф2553. *Основанием тетраэдра из скользкого льда, стоящего на горизонтальном столе, является равносторонний треугольник с ребром a = 1 м. Остальные грани тетраэдра представляют собой равнобедренные треугольники, причем одинаковые углы в этих треугольниках равны $75°$. На тетраэдр поместили тонкую легкую нерастяжимую цепочку длиной $L=\sqrt{2}a$, замкнутую в кольцо. Цепочка в положении равновесия расположилась в горизонтальной плоскости и образовала правильный треугольник. К* *середине одной из сторон получившегося из цепочки треугольника приложили силу, направленную вниз вдоль грани, на которой находилась эта сторона треугольника (в направлении наискорейшего спуска). Цепочка пришла к новому положению равновесия. На каком расстоянии s от самой верхней вершины тетраэдра находится теперь точка приложения силы?*

Углы треугольников боковых граней тетраэдра при вершине, которая находится в самом верху, равны $30°$:

$$180° - 2 \cdot 75° = 30° .$$

Поскольку по условию задачи цепочка легкая и фигура изо льда скользкая, то это означает, что по разные стороны от ребер, которые пересекаются участками цепочки, углы, образованные цепочкой и перпендикуляром к ребру таковы, что продольные (вдоль ребра) составляющие сил натяжения участков цепочки одинаковы. В силу этого и благодаря симметрии, на одном из ребер эти углы должны быть равными $0°$. На рисунке показана «развертка» тетраэдра с цепочкой на нем на плоскости.

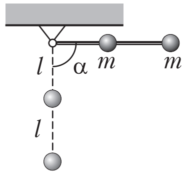


Видно, что участки цепочки и участок ребра, по которому поведен «разрез», образуют квадрат. Расстояние s от точки приложения силы до верхней вершины тетраэдра равно длине диагонали этого квадрата, т.е.

$$s = \sqrt{2}\frac{L}{2} = a .$$

С.Варламов

Ф2554. *Невесомый жесткий стержень длиной 2l с помощью шарнира прикреплен к потолку так, что может совершать колебания только в вертикальной плоскости (см. рисунок). В середине стержня и на свободном его конце закреплены шарики массой m каждый, размеры которых много меньше l. Стержень отводят из положения равновесия на угол 90° (угол отсчитывается от вертикали) и аккуратно отпускают (без начальной скорости). Найдите мощность силы реакции стержня, действующей на средний шарик, в зависимости от угла α. Диссипации механической энергии в системе нет.*



Механическая энергия системы шариков и стержня в поле тяжести сохраняется, поэтому в произвольный момент времени, когда стержень с вертикалью составляет угол α (этот угол всегда считается положительным и отсчитывается от вертикали), выполняется соотношение

$$\frac{5}{2}m\omega^2 l^2 - 3mgl\cos\alpha = 0 ,$$

где ω – угловая скорость нашего маятника. Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \pm\frac{3}{5}\frac{g}{l}\sin\alpha .$$

Здесь учтено, что модуль угловой скорости ω связан со скоростью изменения угла α при движении стержня вниз соотношением $\frac{d\alpha}{dt} = +\omega$, а при движении вверх – соотношением $\frac{d\alpha}{dt} = -\omega$. Элементарная работа тангенциальной составляющей силы реакции стержня, действующей на средний шарик, равна изменению его механической энергии:

$$dA = d\left(\frac{ml^2\omega^2}{2} - mgl\cos\alpha\right) = \\ = ml^2\omega d\omega + mgl\sin\alpha \cdot d\alpha .$$

Тогда мощность этой силы будет равна

$$N = \frac{dA}{dt} = ml^2\omega\frac{d\omega}{dt} + mgl\sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} ,$$

или, с учетом полученного ранее выражения для $\frac{d\omega}{dt}$ (соблюдая знаки «−» или «+» при движении вниз или вверх),

$$N = \pm\frac{8}{5}mgl\omega\sin\alpha .$$

Выразив угловую скорость ω через угол α из самого первого соотношения:

$$\omega = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{g}{l}\cos\alpha} ,$$

окончательно получаем

$$N = \pm\frac{8}{5}mg\sqrt{\frac{6}{5}gl\cos\alpha}\sin\alpha .$$

Заметим, что при движении стержня вниз средний шарик тормозится стержнем, а нижний разгоняется. При движении стержня вверх – наоборот.

И.Макаров

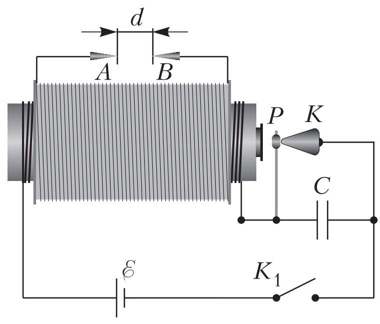
Ф2555. *Вода в аквариуме для рыбок из южных стран имеет температуру выше, чем комнатная, и мощность тепловых потерь аквариума пропорциональна разнице температур воды и воздуха в комнате, который обдувает аквариум, обеспечивая эти тепловые потери. Коэффициент пропорциональности для тепловых потерь равен 5 Вт/°С. Вплотную к середине одной из стенок аквариума установлена маленькая по размерам лампочка накаливания с потребляемой от сети мощностью 25 Вт, работающая непрерывно. Свет от лампочки, идущий равномерно во все стороны, и освещает аквариум и греет воду в нем. Поскольку видны и рыбки и водоросли, то свет от лампочки, попавший в аквариум, частично выходит наружу в виде излучения. Эти потери составляют всего 1% от излучения, попадающего от лампочки в аквариум. Зимой хозяин аквариума поставил плоское зеркало параллельно стенке аквариума вплотную к лампочке, и лампочка оказалась «зажатой» между стенкой аквариума и зеркалом. Коэффициент отражения света зеркалом равен 90%. В комнате зимой температура воздуха равна 18 °С. Какова зимой температура воды в аквариуме?*

В аквариум от лампочки и от ее изображения попадает излучение мощностью $W = 25\cdot\frac{1+0{,}9}{2}$ Вт, причем 99% этого излучения остается в аквариуме, а 1% покидает аквариум в виде света. При данном коэффициенте теплоотдачи 5 Вт/°С разница температур воды в аквариуме и воздуха в комнате составит $\frac{0{,}99\,W}{5\text{ Вт/°С}} = 4{,}7\text{ °С}$. Поскольку зимой в комнате температура воздуха 18 °С, то вода в аквариуме имеет температуру

$$t = 18\text{ °С} + 4{,}7\text{ °С} = 22{,}7\text{ °С} .$$

З.Рыбка

Ф2556. *На рисунке 1 схематично изображено устройство, называемое катушкой Румкорфа. На сердечник с большой магнитной проницаемостью намотаны две обмотки: первичная обмотка из толстого провода и поверх нее вторичная обмотка из тонкого провода. Размыкатель (Р) предварительно регулируют, замкнув накоротко конденсатор (С), так, чтобы размыкатель срабатывал в тот момент, когда ток в первичной обмотке достигает 90% от максимального значения тока при выбранном источнике питания. После регулировки ключ K_1 переводят в разомкнутое положение и «закоротку» конденсатора убирают. Теперь установка готова к работе. В исходном положении размыкатель Р замкнут на контакт K. После замыкания ключа K_1 ток через первичную обмотку начинает увеличиваться, и в какой-то момент размыка-*



$L_1 = 10^{-3}$ Гн, $N_1 = 30$
$L_2 = 10$ Гн, $N_2 = 3000$
$C = 0{,}1$ мкФ, $d = 3$ см, $R_0 \approx 1$ Ом

Рис. 1

тель срабатывает. Между выводами А и В вторичной обмотки возникает большое напряжение. Если средняя напряженность поля в промежутке АВ превысит значение 30 кВ/см, в промежутке возникнет искровой разряд. Вне зависимости от того, возник или нет искровой разряд, энергия, запасенная в виде магнитного поля, после размыкания цепи постепенно переходит в тепло и при ее уменьшении почти до нуля размыкатель перестает притягиваться к сердечнику и снова замыкает цепь. Сколько одинаковых автомобильных аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_0 = 12$ *В и внутренним сопротивлением* $r_0 = 0{,}5$ *Ом нужно соединить последовательно друг с другом и использовать в качестве источника питания в устройстве, чтобы воздушный промежуток гарантированно «пробивался»? Значения других параметров установки указаны на рисунке 1.*

После возникновения искры ток в первичной обмотке быстро уменьшается, и, когда магнитное поле катушки становится малым, размыкатель возвращается в исходное положение, а конденсатор (если он был заряжен) разряжается. Далее процесс повторяется: ток через первичную обмотку достигает значения $I_0 = \frac{0{,}9\mathcal{E}}{R}$, где $\mathcal{E}$ – суммарная ЭДС аккумуляторной батареи, R – суммарное сопротивление в цепи первичной обмотки, размыкатель размыкается, возникает искра и так далее.

Теперь перейдем к рассмотрению процессов, происходящих после размыкания размыкателя. Первичная и вторичная обмотки образуют трансформатор. При наличии тока в обеих обмотках обсуждение работы трансформатора представляет собой весьма непростую задачу. Однако до момента возникновения искры во вторичной обмотке тока нет, поэтому для оценки достаточно рассмотреть трансформатор в режиме холостого хода. Напряжение между выводами связано с напряжением на первичной обмотке известным соотношением

$$\frac{U_{AB}}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Таким образом, напряжение U_{AB} на разрядном промежутке в 100 раз больше ЭДС самоиндукции в первичной катушке. Для возникновения искры это напряжение должно быть оценочно таким:

$$U_{AB} = U_0 = E_0 d = 90 \text{ кВ}.$$

Следовательно, необходимая ЭДС самоиндукции равна

$$U_1 = 900 \text{ В}.$$

После размыкания цепь первичной обмотки представляет собой колебательный контур с источником постоянной ЭДС (рис.2).

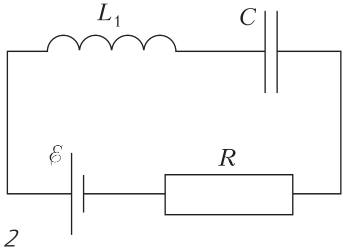


Рис. 2

Сопротивление R равно сумме сопротивления R_0 и внутреннего сопротивления аккумуляторной батареи nr_0, где n – количество аккумуляторов в батарее. По порядку величины $R \lesssim 10$ Ом. Оценим период возникающих колебаний и время их затухания:

$$T \sim \sqrt{LC} = 10^{-5} \text{ с}, \quad \tau \sim \frac{L}{R} = 10^{-4} \text{ с}.$$

Другими словами, затухание происходит медленно. Для оценки максимальной ЭДС самоиндукциии в процессе колебаний можно считать, что затухания вообще нет, иначе говоря, считать, что $R = 0$. (Тем более, что оценить надо ЭДС самоиндукции в первом пике.) Далее, в случае возникновения искры по вторичной обмотке потечет ток, что повлияет на ЭДС самоидукции в первичной обмотке. Модель простого колебательного контура перестанет работать, но самое главное – бо́льшая часть энергии, запасенной в катушке, израсходуется при возникновении искрового разряда.

Напряжение U на конденсаторе в контуре с батарейкой удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{E} - U_0 \le U \le \mathcal{E} + U_0,$$

где U_0 – амплитуда напряжения на конденсаторе, равная амплитуде ЭДС самоиндукции. Для того чтобы зажигалась искра, необходимо выполнение условия $U_0 > 900$ В. Попробуем определить U_0, используя закон сохранения энергии. К моменту достижения максимального напряжения на конденсаторе $\mathcal{E} + U_0$ ток станет равен нулю, а ЭДС переместит заряд $C(\mathcal{E} + U_0)$ и совершит работу $C\mathcal{E}(\mathcal{E} + U_0)$, которая равна суммарному изменению энергии катушки и конденсатора. Эти соображения количественно отражает соотношение

$$C\mathcal{E}(\mathcal{E} + U_0) = \frac{C(\mathcal{E} + U_0)^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2}.$$

После преобразований получим

$$U_0^2 = \mathcal{E}^2 + \frac{L}{C} I_0^2, \text{ и } U_0 = \mathcal{E}\sqrt{1 + \frac{0{,}81L}{R^2C}}.$$

Напомним, что $\mathcal{E} = n\mathcal{E}_0$, где n – количество аккумуляторов, $\mathcal{E}_0$ – ЭДС одного аккумулятора, $R = nr_0 + R_0$ – общее сопротивление в цепи первичной обмотки. Прикинем теперь, сколько нужно аккумуляторов, чтобы искровой промежуток пробивался. Если $n = 1$, то амплитуда напряжения равна

$$U_0^{(1)} = 12\sqrt{1 + \frac{0{,}81 \cdot 10^4}{1{,}5^2}} \text{ В} \approx 720 \text{ В}.$$

Одного аккумулятора мало. Для $n = 2$ амплитуда равна

$$U_0^{(2)} = 24\sqrt{1 + \frac{0{,}81 \cdot 10^4}{4}} \text{ В} \approx 1080 \text{ В}.$$

Двух аккумуляторов хватит.

П.Крюков

Ряд чисел, обратных к простым

В.БРАГИН

В математике часто в том или ином виде встречается понятие бесконечности. Например, рассматриваются суммы с неограниченным количеством слагаемых (на самом деле в статье-то почти все суммы конечны) и бесконечные суммы, называемые *числовыми рядами*. В вопросах о бесконечных множествах опыт работы с конечными объектами иногда абсолютно не помогает. Преподавая у детей в кружках, всегда интересно наблюдать за первыми встречами школьников с бесконечными суммами. Видно, как трудно дается освоение этого нового мира со своими законами.

Начнем со следующей классической теоремы про так называемый *гармонический ряд*, или ряд из обратных к натуральным числам.

Теорема 1. *Сумма* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N}$ *может быть больше любого наперед заданного числа.*

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2},$$

да и вообще

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2},$$

поскольку в левой части 2^k слагаемых и все они, кроме одного, больше $\frac{1}{2^{k+1}}$, а оставшееся ему равно. Поэтому

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^m} > 1 + \frac{m}{2},$$

т.е. сумма в левой части может быть сколь угодно большой.

Некоторым юным кружковцам этот факт кажется естественным: мы же можем брать сколько хотим слагаемых, конечно же, сумму можем увеличивать, как хотим. И следом идет нечто удивительное: сколько слагаемых в сумме $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ ни бери, результат будет меньше 2. Оказывается, зависит от того, какие слагаемые!

Когда я был школьником, меня удивила такая сюрреалистичная задача.

Задача 1. *Резинка длиной один метр одним концом цепляется за вбитый гвоздь, а другой конец держит Андрей. На прибитом конце сидит жук, который начинает ползти к Андрею со скоростью 1 см/мин. Каждую минуту Андрей растягивает*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190503

резинку еще на один метр. Доползет ли когда-то жук до Андрея?

На первый взгляд кажется, что каждую минуту оставшаяся жуку дистанция увеличивается на 99 сантиметров, поэтому как же он доползет? Но на самом деле жук ведь отдаляется от гвоздя вместе с растяжением резинки. Поэтому важно, что жук проползает не по 1 см каждую минуту, а сначала $\frac{1}{100}$ от всей длины, потом $\frac{1}{200}$, потом $\frac{1}{300}$ и т.д. Из расходимости гармонического ряда следует, что когда-то эта сумма станет больше 1.

Менее тривиальным оказывается следующий факт.

Теорема 2. *Сумма* $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ *ограничена (числом, не зависящим от n).*

Доказательство. Будем доказывать, что

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Это неравенство следует из того, что

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\frac{1}{n^2}<\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$$

Неравенство (1) позволяет доказать следующие изящное утверждение.

Теорема 3. *Среди чисел от* 1 *до* 2^{n+1} *хотя бы n простых.*

Доказательство. Предположим, среди чисел от 1 до 2^{n+1} ровно k простых чисел. Назовем число *свободным от квадратов*, если оно не делится ни на какой точный квадрат, больший 1.

Обозначим через M количество свободных от квадратов чисел от 1 до 2^{n+1}.

Лемма 1. $M \le 2^k$.

Доказательство. Заметим, что в разложении каждого свободного от квадратов числа, меньшего 2^{n+1}, входят только простые, меньшие 2^{n+1}, причем в степени не выше первой. Поэтому каждое свободное от квадратов число определяется подмножеством своих простых делителей. Подмножеств из k элементов, как мы знаем, 2^k.

Лемма 2. $M > 2^{n-1}$.

Доказательство. Оценим сверху количество чисел, несвободных от квадратов. Не более четверти всех чисел делится на 4, не более девятой части делится на 9 и т.д. Таким образом, количество чисел, несвободных от квадратов, не более чем $\frac{2^{n+1}}{2^2}+\frac{2^{n+1}}{3^2}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{\left(2^{n+1}\right)^2}$, что в свою очередь равно

$$2^{n+1}\left(\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{n+1}\right)^2}\right)<2^{n+1}\cdot\frac{3}{4}=3\cdot 2^{n-1}.$$

А тогда свободных от квадратов чисел больше 2^{n-1}.

Неравенство $k > n-1$ легко получается из этих двух лемм, что и завершает доказательство теоремы 3.

Отметим, что теорема 3 следует из знаменитого постулата Бертрана, но нам удалось дать достаточно простое доказательство.

Отдельный интерес вызывает следующее утверждение.

Теорема 4. *Если* p_i – i*-е по счету простое число, то сумма* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}$ *не ограничена.*

Отложив доказательство теоремы, решим с ее помощью следующую задачу – задачу **М2548** «Задачника «Кванта».

Задача 2. *Натуральное число n называется избыточным, если сумма всех его собственных делителей (т.е. натуральных делителей, отличных от самого n) больше n. Докажите, что для любого натурального N существует N подряд идущих избыточных чисел.*

Лемма. *Можно подобрать k групп попарно различных простых чисел так, что сумма обратных величин к числам каждой группы больше* 1.

Доказательство. Будем доказывать это утверждение индукцией по k.

База: $k = 0$.

Переход: $k \to k+1$. Предположим, набрали k групп и все выбранные простые числа меньше натурального M. Тогда заметим, что сумма обратных к простым, большим M, неограничена, как и сумма обратных ко всем простым (поскольку сумма обратных к простым, не превосходящим M, конечная). Поэтому можно выбрать несколько простых, больших M, сумма обратных величин к которым больше 1. Таким образом, мы набрали еще одну группу. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Выберем N групп простых чисел, о которых говорится в лемме. Теперь нам надо добиться того, чтобы a, первое из последовательных чисел, делилось на простые первой группы, второе – делилось на числа из второй группы, третье – на числа из третьей группы и т.д. Это будет выполнено, если $a \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p_{1,i}\right)$, $a \equiv -1 \left(\operatorname{mod} p_{2,i}\right)$, … …, $a \equiv -N+1 \left(\operatorname{mod} p_{N,i}\right)$, где $p_{l,i}$ пробегает простые числа из группы номер l. Каждое из этих требований – это сравнение по модулю простого числа. А китайская теорема об остатках гарантирует, что такая система по модулям различных простых разрешима. Но если число делится на все простые из какой-то группы, то оно избыточное. Действительно, если число b делится на простые из группы номер l, у него уже есть собственные делители $\frac{b}{p_{l,1}}, \frac{b}{p_{l,2}}, \ldots$, а сумма этих делителей уже больше b. Таким образом, каждое из чисел a, $a+1$, …, $a+N-1$ избыточно. Задача решена.

Теперь давайте докажем теорему 4. Начнем с нескольких вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^N}\right) > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}. \quad (2)$$

Доказательство. Если раскрыть скобки, то получится много слагаемых вида $\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_N^{\alpha_n}}$. Заметим, что каждое число $\frac{1}{k}$, где $k \le N$, получится, потому что у любого такого k в разложении на простые множители встречаются только простые, не большие N и не более чем в N-й степени.

Утверждение 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m, что выполнено неравенство*

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right) < \varepsilon. \quad (3)$$

Доказательство. Увеличим левую часть формулы (2), заменив каждую сумму геометрической прогрессии на сумму бесконечной, и получим

$$\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}.$$

Перевернем дроби в обеих частях со сменой знака:

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) < \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}}.$$

Выберем такое N, для которого $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{N} > \frac{1}{\varepsilon}$, и тем самым завершим доказательство утверждения.

Утверждение 3. *Для любого C существует такое n, что выполнено неравенство*

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right) > C. \quad (4)$$

Доказательство. Предположим, что для любого n выполнено

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right) \le C. \quad (5)$$

Выберем такое n, для которого

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right) < \frac{1}{2C}. \quad (6)$$

По утверждению (2) такое n существует. Перемножим (6) и (5):

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right) < \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Уменьшим левую часть, добавив множители $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ для составных $k < p_n$. После чего преобразуем каждую скобку $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ как $\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ и получим

$$\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(p_n+1)(p_n-1)}{p_n^2} < \frac{1}{2}.$$

Но нетрудно видеть, что левая часть последнего неравенства равна $\frac{p_n+1}{2p_n}$. Очевидно, это не меньше $\frac{1}{2}$.

Поймем, как из этого следует теорема 4. Предположим, что для всех n выполнено

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n} < C.$$

Возведем число e в степень обеих частей:

$$e^{\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n}} = e^{\frac{1}{p_1}}\cdot e^{\frac{1}{p_2}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{1}{p_n}} < e^C. \quad (8)$$

Как известно, $e^x \ge x+1$ для всех $x \ge 0$. Применим это к левой части (8) и получим

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right) < e^C.$$

Но по утверждению 3 произведение $\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)$ при некотором n станет больше e^C. Противоречие.

Известно, что количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n, вычисляется как

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – все различные простые делители n. Утверждение 2 означает, что бывают n, для которых $\frac{\varphi(n)}{n} < \varepsilon$ (при этом все p_i могут быть достаточно большими). Это поможет разобрать интересную задачу, придуманную по мотивам одной старой задачи Ленинградской олимпиады.

Задача 3. *Дан правильный n-угольник. Любое подмножество его вершин назовем шаблоном. Назовем шаблон маленьким, если в нем меньше* $\frac{1}{100}$ *от общего числа вершин. Могло ли при каком-то n оказаться, что любые* 100 *шаблонов, получающихся из некоторого маленького шаблона поворотом, имеют общую вершину?*

Решение. Подберем n в виде произведения нескольких различных простых $p_1p_2\ldots p_k$, каждое из которых больше 100, так, чтобы $\frac{\varphi(n)}{n} < \frac{1}{100}$. Выберем требуемый шаблон – все вершины, номера которых взаимно просты с n. Тогда в шаблон войдут менее $\frac{n}{100}$ вершин. Докажем, что любые 100 шаблонов, полученных из данного поворотами, пересекаются.

Действительно, предположим, что это повороты на $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Для каждого простого p_i подберем остаток r_i, не сравнимый с $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ по модулю p_i. Такой остаток существует, поскольку $p_i > 100$. А теперь подберем остаток a при делении на n, сравнимый с r_i по модулю p_i для всех i. Такой остаток a найдется по китайской теореме об остатках.

Вершина с номером a окажется во всех шаблонах. Действительно, для любого j от 1 до 100 выполнено $a - a_j \equiv r_i - a_j \not\equiv 0 \pmod{p_i}$. Значит, $a - a_j$ взаимно просто с n.

Желающие попрактиковаться могут попробовать свои силы в следующих задачах. Первые две из них скорее упражнения, последняя же задача по-настоящему сложная.

Задача 4. Петя утверждает, что начиная с некоторого момента каждое следующее простое число больше предыдущего хотя бы в $\left(1+10^{-10}\right)$ раз. Докажите, что он не прав.

Задача 5. Обозначим $\sigma(n)$ сумму делителей числа n. Дано число $x > 1$. Докажите, что существует такое целое n, что

$$x < \frac{\sigma(n)}{n} < x + 10^{-6}.$$

Задача 6. Натуральное n назовем интересным, если $\frac{\varphi(n)}{n} < \frac{1}{100}$. Докажите, что существует 1000 подряд идущих интересных чисел.

Задача 7. Множество вычетов A по модулю n назовем *свободным от произведений*, если $xy \not\equiv z \pmod{n}$ для всех $x, y, z \in A$ (необязательно различных). Наибольшее количество элементов в множестве, свободном от произведений, обозначим $f(n)$. Существуют ли такие n, для которых $f(n) > \frac{n}{2}$?

Задачи

1. Из спичек сложено число 1828. Какое наименьшее количество спичек надо переложить, чтобы получить число, которое является полным квадратом?

С.Костин

2. У одноклассниц Маши и Светы одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек с котиками. Маша наклеила на 7 тетрадей по одному котику, а на остальные

— по 7 котиков. Света наклеила на 11 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 11 котиков. Сколько котиков было в наборе, если каждая девочка израсходовала весь набор?

Фольклор

Задачи 2–4 предлагались на XVII Московской устной олимпиаде по математике для 6–7 классов.

3. Нарисуйте такую четырехзвенную ломаную, чтобы ее вершины не совпадали с вершинами данного треугольника и чтобы она через каждую из вершин треугольника проходила дважды.

Д. Трущин

4. Антон, Боря и Вова участвовали в велопробеге по шоссе Каргополь-Медвежьегорск. Они стартовали в разное время, и каждый ехал с постоянной скоростью: Антон — быстрее Бори, а Боря — быстрее Вовы. В неко-

торых точках шоссе были установлены видеокамеры. Каждая из них фиксировала порядок прохождения участниками этой точки. Оказалось, что любой порядок, в котором могли проехать Антон, Боря и Вова, был реализован в какой-то из точек. Известно, что кто-то один из троих падал. Кто именно?

М.Хачатурян, Н.Медведь

Иллюстрации Д.Гришуковой

Диагональ клетчатого прямоугольника

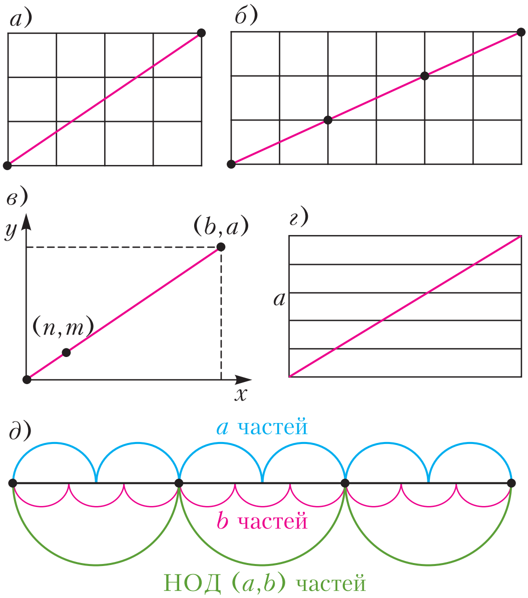
Е.БАКАЕВ

В этой статье мы приведем разные решения классической задачи 1 про диагональ клетчатого прямоугольника. А затем покажем, как довольно неожиданным образом она встречается в задачах, в которых ни о каком клетчатом прямоугольнике речи нет. Начнем, конечно, с нее самой.

Задача 1. *В клетчатом прямоугольнике $a \times b$ проведена диагональ. а) Сколько на ней лежит узлов сетки? б) На сколько частей она делится линиями сетки?*

Например, на диагонали прямоугольника 3×4 нет узлов (вершины прямоугольника мы не считаем), и она делится линиями сетки на 6 частей (рис.1,*а*). А для прямоугольника 3×6 ответы: 2 и 6 соответственно (рис.1,*б*).

а) Первое решение. Введем оси координат так, чтобы одна из вершин прямоугольника располагалась в начале координат и он целиком лежал в первой четверти, а сторона одной клетки равнялась 1 (рис.1,*в*). Прямая, содержащая диагональ, проходит через начало координат, значит, ее уравнение имеет вид $y = kx$, а так как она содержит точку (b,a), то $k = \frac{a}{b}$ и уравнение прямой $y = \frac{a}{b}x$.



Если на диагонали лежит целая точка (n,m), то, во-первых, раз точка на самой диагонали, а не на продолжении, то $0 < m < a$, а во-вторых, точка удовлетворяет уравнению прямой, т.е. $m = \frac{a}{b}n$, откуда $an = bm$.

Для простоты разберем сначала случай, когда a и b взаимно простые числа (как в случае на рисунке 1,*а*). Тогда из того, что bm делится на a, следует, что m делится на a. Но такого быть не может, так как $0 < m < a$. Значит, когда длины сторон взаимно просты, то на диагонали нет узлов.

Перейдем к общему случаю. Пусть $\text{НОД}(a,b) = d$, а также $a = a'd$, $b = b'd$. Тогда $\text{НОД}(a',b') = 1$. Поделим обе части уравнения $an = bm$ на d, получим уравнение $a'n = b'm$. Теперь можно сделать вывод, что раз a' и b' взаимно простые, то m делится на a', т.е. m можно представить в виде $m = a't$, где t – целое. Тогда $n = \frac{b'm}{a'} = \frac{b'a't}{a'} = b't$. Поделим все части неравенства $0 < m < a$ на a' и получим, что $0 < t < d$. Для каждого целого t в этом диапазоне числа m и n тоже будут целыми, значит, они будут давать узел на диагонали. Таким образом, на диагонали $\text{НОД}(a,b) - 1$ узлов. Они расположены в точках с координатами $(b't, a't)$, где $0 < t < d$.

Второе решение. Пусть длина диагонали равна ab (соответственно, уже не считаем, что сторона клетки равна 1). Введем координаты на диагонали от 0 в одной вершине до ab в другой. По теореме Фалеса горизонтальные линии сетки делят диагональ на a равных отрезков (рис.1,*г*), а значит, они пересекают диагональ в точках с координатами, кратными b. Аналогично, вертикальные линии пересекают диагональ в точках с координатами, кратными a. Узел – это пересечение вертикальной и горизонтальной линий сетки, поэтому на диагонали узлы – это точки с координатами, кратными и a и b, а значит, кратными $\text{НОК}(a,b)$. Посколь-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190504

ку $ab = \text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)$, то количество чисел от 1 до ab, кратных $\text{НОК}(a,b)$, равно $\text{НОД}(a,b)$. Так как точка с координатой ab это конец диагонали, то, отбросив эту точку, получим ответ $\text{НОД}(a,b)-1$.

Третье решение. Докажем, что узлы делят диагональ на равные части. Возьмем два узла P и Q на диагонали и рассмотрим параллельный перенос плоскости, переводящий один из них в другой. Тогда прямая, содержащая диагональ, перейдет в себя и вся сетка перейдет в себя. Значит, и следующий узел на диагонали после P перейдет в следующий узел после Q. Таким образом, расстояния между соседними узлами на диагонали одинаковые.

Горизонтальные линии сетки делят диагональ на a равных отрезков. Узлы сетки тоже делят диагональ на несколько равных частей, обозначим это количество k. При этом каждый узел лежит и на горизонтальной линии сетки. Значит, каждый из k равных отрезков, на которые диагональ разбивается узлами, делится на равные части горизонтальными линиями и всего частей получается a. Поэтому a делится на k. Аналогично, b делится на k. Следовательно, $\text{НОД}(a,b)$ делится на k. При этом если разбить диагональ на $\text{НОД}(a,b)$ равных частей, то в каждую часть попадет целое количество отрезков, высекаемых горизонтальными линиями – ведь их количество a делится на $\text{НОД}(a,b)$ (рис.1,*д*). То же верно и про вертикальные линии. Значит, узлы делят диагональ на $k = \text{НОД}(a,b)$ частей, а узлов на ней $\text{НОД}(a,b)-1$.

б) Решение. Диагональ делится на a равных отрезков $a-1$ горизонтальными линиями сетки и на b равных отрезков $b-1$ вертикальными линиями сетки. Всего количество линий сетки, пересекающих диагональ, равно $a+b-2$. Если бы они все пересекали диагональ в разных точках, то точек пересечения было бы $a+b-2$, но некоторые точки пересечения могут совпадать. Количество именно таких точек мы и посчитали в пункте а) – их $\text{НОД}(a,b)-1$. Значит, различных точек пересечения

$$(a+b-2)-(\text{НОД}(a,b)-1) = \\ = a+b-\text{НОД}(a,b)-1.$$

Количество отрезков, на которые диагональ бьется этими точками, на 1 больше количества точек, поэтому равно $a+b-\text{НОД}(a,b)$.

Следующую задачу проще решать без привлечения прямоугольника (подумайте, как). Но интересно и найти в ней связь с первой задачей.

Задача 2. *Докажите, что среди чисел* $\frac{a}{2}, 2\cdot\frac{a}{b}, 3\cdot\frac{a}{b}, \ldots, b\cdot\frac{a}{b}$ *ровно* $\text{НОД}(a,b)$ *целых чисел.*

Решение. Рассмотрим такой же прямоугольник $a\times b$, как в задаче 1. Его диагональ лежит на прямой $y=\frac{a}{b}x$. Точки $\left(1,\frac{a}{b}\right)$, $\left(2, 2\cdot\frac{a}{b}\right)$, $\left(3, 3\cdot\frac{a}{b}\right)$, …, $\left(b, b\cdot\frac{a}{b}\right)$ являются точками пересечения диагонали этого прямоугольника с вертикальными линиями сетки (рис.2). Значит, количество целых чисел среди перечисленных в условии равно количеству узлов на диагонали. При этом последняя точка $\left(b, b\cdot\frac{a}{b}\right)$ совпадает с вершиной прямоугольника. Поэтому количество получается на 1 больше, чем в задаче 1а, т.е. $\text{НОД}(a,b)$.

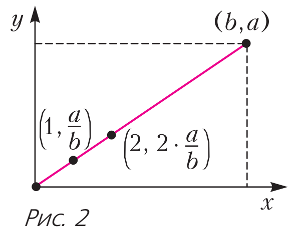


Рис. 2

Частный случай следующей задачи недавно предлагался на XLI Турнире Ломоносова (для $M = 8$).

Задача 3. *В доме NM этажей. В подъезде два лифта, в каждом из которых кнопки расположены в виде прямоугольника $N\times M$ (N строк, M столбцов), но пронумерованы по-разному: в одном «слева направо, снизу вверх», а в другом «снизу вверх, слева направо» (пример для $N=7$, $M=4$ приведен на рисунке 3,а). Даня нажимает кнопку своего этажа, не глядя на нумерацию, потому что эта кнопка в обоих лифтах расположена на одном и том же месте. На каком этаже он может жить? (Например, для $N = 7$, $M = 4$ ответ: 1, 10, 19 и 28). Требуется выразить все возможные варианты ответа через N и M.*

Решение. Введем систему координат, как показано на рисунке 3,*б*. Тогда центры кнопок будут иметь целые координаты, т.е.

а)

25	26	27	28
21	22	23	24
17	18	19	20
13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

7	14	21	28
6	13	20	27
5	12	19	26
4	11	18	25
3	10	17	24
2	9	16	23
1	8	15	22

M

б)

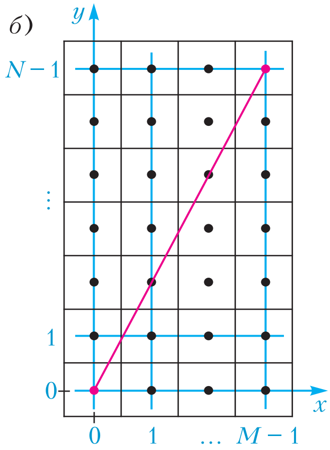


Рис. 3

будут узлами сетки. Пусть центр кнопки расположен в точке (x, y). Выразим номер кнопки через координаты ее центра (в каждой из двух нумераций). В первой нумерации этаж увеличивается на 1 при увеличении координаты x на 1 и на M – при увеличении y на 1. Значит, номер кнопки в первой нумерации будет $1 + x + My$. Номер кнопки, расположенной в том же месте, во второй нумерации будет, аналогично, $1 + Nx + y$. Для этажа Дани эти номера совпадают: $1 + x + My = 1 + Nx + y$. Тогда $y = \frac{N-1}{M-1}x$, а это уравнение прямой, соединяющей центры левой нижней и правой верхней кнопок. Значит, ответами являются все узлы, лежащие на этой диагонали! А как ответ выражается через стороны прямоугольника (в данном случае $N - 1$ и $M - 1$), уже обсуждалось в решении задачи 1.

Многие задачи про прямоугольные бильярды сводятся к задачам про клетчатую плоскость. Это видно на примере следующей задачи, которая по сути сводится к задаче 1.

Задача 4. *В квадратном бильярде со стороной 1, в углах которого находятся лузы, из левого нижнего угла выпустили шар (рис.4,а). Сначала он ударился о правую стенку; пусть длина отрезка, отмеченного на рисунке, равна r. Шар продолжает летать, отражаясь от стенок, пока не попадет в лузу («угол падения» равен «углу отражения»). При каких r шар попадет в лузу, а при каких будет летать бесконечно? Если шар попадет в лузу, то в какую?*

Решение. Как и во многих задачах про бильярды, здесь поможет «выпрямление» траектории шара.

Отразим квадрат относительно стороны, о которую ударился шар, вместе с траекторией шара (рис.4,б). Тогда два отрезка траектории выстроятся в один отрезок. Затем отразим полученный квадрат относительно следующей стороны, о которую ударится квадрат, и т.д. Вершины квадратов будем отмечать четырьмя разными цветами, чтобы было ясно, как они друг другу соответствуют. Все полученные при отражениях квадраты будут частью бесконечной квадратной сетки, фрагмент которой изображен на рисунке 4,в, потому что в ней любые два

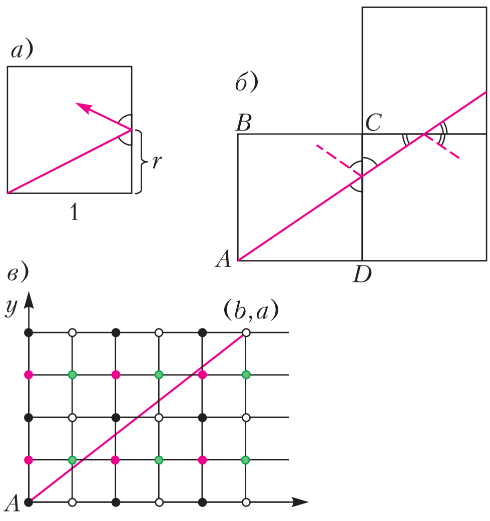


Рис. 4

соседних квадрата (и раскраска их вершин) симметричны относительно их общей стороны. (Раскраска периодичная, и повторяется в ней один фрагмент 2×2.)

Таким образом, мы «выпрямили» траекторию – она стала лучом, проходящим по клетчатой плоскости. Введем координаты так, чтобы начало луча располагалось в начале координат и исходный квадрат целиком лежал в первой четверти. Уравнение прямой, на которой лежит этот луч, $y = rx$. Если этот луч пройдет через какой-то узел (b, a), то это означает, что $r = \frac{a}{b}$, т.е. r рационально. Верно и обратное: если r рационально и равно дроби $\frac{a}{b}$, то луч пройдет через узел (b, a). Итак, шар попадет в лузу тогда и только тогда, когда r рационально.

Если r представляется в виде несократимой дроби как $\frac{a}{b}$, то (b, a) это первый узел, через который пройдет луч, потому что по задаче 1 при $\text{НОД}(a, b) = 1$ на диагонали прямоугольника $a\times b$ узлов нет. Чтобы ответить на вопрос, в какую лузу попадет шар, надо посмотреть на цвет узла (b, a) в раскраске на рисунке 4,*в*. При нечетных a и b шар придет в лузу C, при четном a и нечетном b – в лузу D, при нечетном a и четном b – в лузу B. Координаты a и b не могут быть четными одновременно, потому что тогда дробь $\frac{a}{b}$ была бы сократимой, поэтому ситуация, когда шар попадет в лузу A, невозможна.

Последние две задачи этой статьи наиболее трудные. Идея рассмотреть прямоугольник в них не лежит на поверхности, но дает существенную помощь при решении.

Задача 5 (XIII Всесоюзная олимпиада, 1979 г.). *Натуральные числа a и b взаимно просты. Отрезок* $[0;1]$ *разбит на* $a + b$ *одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из* $a + b - 2$ *чисел*

$$\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a-1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}.$$

Решение. Одна серия точек делит отрезок на a равных частей, а другая на b – так же, как в первой задаче! Тогда снова рассмотрим прямоугольник $a\times b$. Если на его диагонали ввести координаты с нулем в одном конце диагонали и с единицей в другом, то числа из условия будут координатами точек пересечения диагонали с линиями сетки.

Поймем, как получается разбиение диагонали на $a + b$ одинаковых отрезков. Сумма $a + b$ это количество единичных отрезков сетки в сторонах AB и BC вместе. Продлим сторону AB на длину BC до точки K (рис. 5,*а*). По теореме Фалеса, если прямые, параллельные

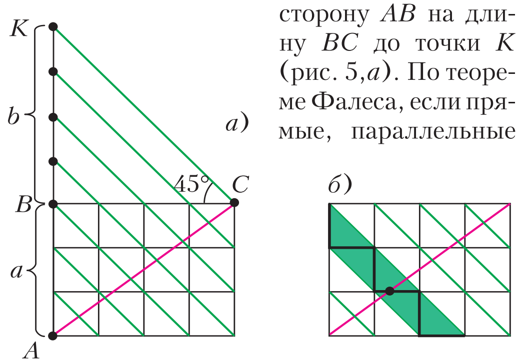


Рис. 5

CK, делят сторону AK на $a + b$ равных частей, то они поделят и сторону AC на $a + b$ равных частей. Треугольник BCK прямоугольный и равнобедренный, значит, диагонали клеток параллельны CK. Таким образом, диагонали клеток делят диагональ AC на $a + b$ равных частей.

Осталось понять, почему на AC между двумя соседними диагоналями клеток ровно один узел.

Всего прямых, на которых лежат диагонали клеток, $a + b - 1$, значит, между ними $a + b - 2$ полос. Отрезки сетки внутри полосы образуют «лесенку», которая идет от одного края прямоугольника до другого и пересекает диагональ AC (рис.5,*б*). Таким образом, в каждой полосе есть по одной точке пересечения линий сетки с диагональю. Всего таких точек $a + b - 2$ – столько же, сколько полос. У соседних «лесенок» есть общие точки, но только в узлах сетки, а по задаче 1 если стороны прямоугольника взаимно просты, то диагональ через них не проходит. Поэтому в каждой полосе ровно по одной точке, что мы и хотели доказать.

Задача 6. *Даны нечетные взаимно простые числа m и n. На отрезке длины* 1 *отметили точки, делящие его на m равных отрезков, а также точки, делящие его на n равных отрезков. Части, на которые* *эти точки разбили отрезок, покрасили в красный и синий цвета в шахматном порядке. Докажите, что разность сумм длин красных отрезков и длин синих отрезков равна* $\frac{1}{mn}$.

На рисунке 6,*а* показан пример для $m = 3$, $n = 5$.

Решение. Рассмотрим клетчатый квадрат со стороной mn. Разобьем его прямыми на прямоугольники $m \times n$ (в которых m строк и n столбцов). Горизонтальные прямые разбивают диагональ на n равных частей, а вертикальные – на m (на рисунке 6,*б* приведен пример для $m = 3$, $n = 5$). Таким образом, диагональ разбивается на части так же, как отрезок из условия. Покрасим части диагонали в шахматном порядке в красный и синий цвета. Далее *отрезками* будем называть только mn отрезков диагонали, являющиеся диагоналями клеток. Для решения задачи надо доказать, что количество красных отрезков отличается от количества синих отрезков на 1.

Выберем один из прямоугольников $m \times n$ и параллельно сдвинем на него остальные прямоугольники (см. пример на рисунке 6,*в*).

Докажем три утверждения. 1) При этом переносе никакой отрезок не наложился на другой. 2) Каждая клетка занята отрезком.

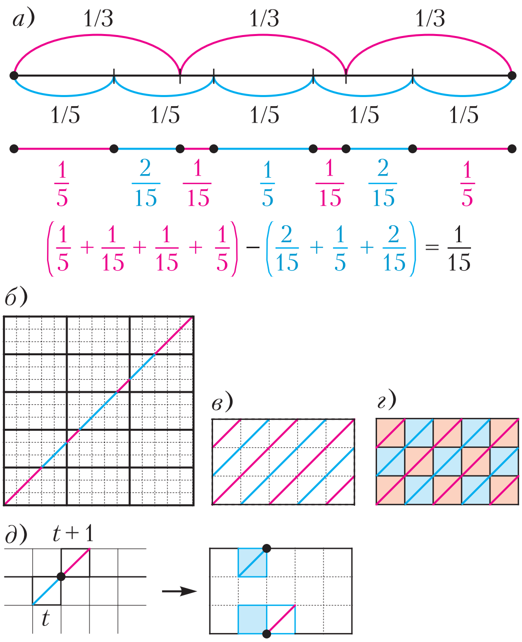


Рис. 6

3) Если раскрасить клетки прямоугольника $m \times n$ в шахматном порядке, то красные отрезки будут лежать в клетках одного цвета, а синие – в клетках другого (см. пример на рисунке 6,*г*).

1) Докажем, что при переносе никакой отрезок не наложился на другой. Пронумеруем все отрезки в том порядке, в каком они шли в диагонали квадрата со стороной mn. Рассмотрим какой-то из этих отрезков с номером $t > 1$ после переноса его в прямоугольник $m \times n$. Заметим, что по его положению однозначно восстанавливается положение отрезка номер $t - 1$. Предположим, что два отрезка с номерами $t > 1$ и $s > 1$ совпали. Тогда совпали и предыдущие отрезки $t - 1$ и $s - 1$. Применив это рассуждение несколько раз, уменьшим один из этих номеров до 1 и получим, что какой-то отрезок v совпадает с отрезком 1. А это значит, что на границе отрезков $v - 1$ и v диагональ квадрата mn проходит через узел нарисованной нами сетки из прямоугольников $m \times n$.

Докажем, что на диагонали квадрата не может быть таких узлов. Если сжать квадрат в n раз по горизонтали и затем в m раз по вертикали, то ячейки сетки примут размер 1×1, а сам квадрат станет прямоугольником $n \times m$. По задаче 1, раз m и n взаимно просты, то диагональ не проходит через узлы сетки, а значит, она не проходила через узлы сетки из прямоугольников $m \times n$ и до этих сжатий. Противоречие. Итак, утверждение 1 доказано.

2) Докажем, что каждая клетка занята отрезком. Всего отрезков mn, что равно количеству клеток прямоугольника $m \times n$, в который эти отрезки перенеслись. При этом никакие два отрезка не попали в одну клетку, как доказано в первом утверждении. Значит, в каждой клетке по отрезку и пустых клеток нет.

3) Докажем, что если раскрасить клетки прямоугольника $m \times n$ в шахматном порядке (в белый и черный цвета), то красные отрезки будут лежать в клетках одного цвета, а синие – в клетках другого. Рассмотрим какой-то отрезок с номером t, пусть он синий. Если отрезок с номером $t + 1$ того же цвета, то после переноса они окажутся в соседних по диагонали клетках, которые также одного цвета.

Если же отрезки разного цвета, то их разделяет линия сетки – допустим, горизонтальная (см. пример на рисунке 6,*д*). Тогда отрезок с номером t переместился в верхнюю строку прямоугольника $m \times n$, а отрезок $t + 1$ – в нижнюю, но в следующий столбец. Стороны прямоугольника $m \times n$ нечетные, поэтому верхняя строка раскрашена так же, как нижняя. А значит, отрезки с номерами t и $t + 1$ будут разного цвета.

Итак, соседние отрезки одного цвета переходят на клетки одного цвета, а соседние отрезки разного цвета – на клетки разных цветов. Значит, все красные отрезки лежат в клетках одного цвета, а синие – в клетках другого.

У прямоугольника $m \times n$ стороны нечетные, поэтому количество черных и белых клеток в шахматной раскраске отличается на 1. Тогда и количество синих и красных отрезков отличается на 1, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

1. Как вы думаете, почему вершины квадратов сетки называют узлами?

2. Сколько чисел от 1 до 300 делятся на 5 или на 6?

3. Сколько из чисел a, $2a$, $3a$, …, ba делятся на b?

4 (к задаче 4). Сколько раз шар ударится о стенку AB до попадания в лузу?

5 (к задаче 4). Попадет ли шар в лузу, если выпустить его из вершины под углом $30°$ к стороне квадрата?

6. Дан прямоугольный бильярд со сторонами 1 и $\sqrt{2}$. Из его угла под углом $45°$ к стороне выпущен шар. Попадет ли он когда-нибудь в лузу?

7. В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q – нечетные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длины $2q$. Из угла выпущен шарик под углом $45°$ к стороне. Докажите, что шарик обязательно попадет в одну из средних луз.

8. Параллелепипед $a \times b \times c$ разбит на единичные кубики. Сколько точек на диагонали параллелепипеда являются вершинами кубиков?

9 (Д.Фомин, пример к утверждению задачи М1232). Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. Докажите, что хозяйка может заранее разрезать пирог на $p + q - \text{НОД}(p, q)$ кусков так, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну.

10 (А.Толпыго, устный тур Турнира городов, 2016 г.). Прямоугольник $p \times q$, где p, q – натуральные взаимно простые числа, $p < q$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите суммарный периметр всех этих треугольников.

ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА 2018/19 УЧЕБНОГО ГОДА

ПОБЕДИТЕЛИ

Лучших результатов добились школьники:

Бирюлин Алексей – Москва, Курчатовская школа, 6 кл.,

Дренчева Мария – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 7 кл.

и команда математической группы Центра «Успех» Гатчинского муниципального района Ленинградской области (руководитель Павлов Сергей Павлович):

Маточинская Варвара – Гатчина, лицей 3, 7 кл.,

Тюков Даниил – Пригородная школа, 8 кл.,

Еронин Валерий – Сиверская гимназия, 8 кл.,

Дзюба Сергей – Гатчина, лицей 3, 8 кл.,

Кашенко Юлия – Гатчина, лицей 3, 9 кл.,

Кудяков Макар – Гатчина, лицей 3, 8 кл.,

Еремеев Семён – Гатчина, лицей 3, 9 кл.

ПРИЗЕРЫ

Жюри конкурса также отмечает хорошие работы следующих школьников:

Коноплев Максим – Москва, школа 1329, 8 кл.,

Крвавич Адриан – Великобритания, Лондон, Уимблдонский колледж, 8 кл.,

Линник Елена – Украина, Харьков, ХУВК 45 «Академическая гимназия», 10 кл.,

Саначев Иван – Москва, школа 1583, 3 кл.

Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО.

Кроме того, призы также получат наиболее активные участники конкурса.

Принцип суперпозиции в электростатике

С.КРЮКОВ

Принцип суперпозиции электрических полей формулируется следующим образом:

Электрическое поле двух или нескольких точечных зарядов в любой точке пространства равно геометрической сумме полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности (т.е. когда остальные заряды устранены).

Главное содержание этого принципа состоит не в том, что поля складываются, как векторы, а в том, что они *не искажаются* присутствием других зарядов, причем не искажаются поля *только точечных зарядов*. Нетрудно привести пример, когда поля различных источников векторно суммируются, но принцип суперпозиции не выполняется. Если взять, скажем, два заряда, расположенных на проводниках, и найти поле в любой точке поблизости, то оно будет векторной суммой полей, созданных каждым зарядом, однако принцип суперпозиции здесь, конечно, не справедлив. Из-за неточечности источников за счет электризации через влияние распределения зарядов на поверхности проводников изменятся, и они будут создавать поля, отличные от тех, которые создавали бы, будучи уединенными. Таким образом, сложатся *искаженные* поля, т.е. требования принципа суперпозиции будут нарушены.

К сожалению, учащиеся далеко не всегда правильно понимают эту главную часть содержания принципа. Более того, порой и в учебной литературе при обсуждении (вполне корректном) процедуры сложения электрических полей упор делается именно на векторный характер этого сложения и при окончательной формулировке принципа суперпозиции вопрос о независимости складываемых полей друг от друга просто оставляется в стороне (см., например, [1], с.51).

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190505

В этой статье на ряде примеров иллюстрируется применение принципа суперпозиции в электростатике. Естественно, любая электростатическая задача может быть решена общими методами, основанными на свойствах кулоновских полей и системе основных уравнений электростатики. Но порой эти решения оказываются весьма громоздкими. Однако если заданную в задаче систему зарядов удается представить в виде наложения более простых подсистем, *не искажающих друг друга*, то решение сложной задачи сводится к наложению решений более простых, иногда даже хорошо известных. Это позволяет не только быстро и красиво (порой устно) получить ответ, но и гораздо нагляднее представить структуру возбуждаемых данной системой зарядов полей. При этом чрезвычайно важно быть уверенным в том, что найденные подсистемы зарядов действительно не исказят друг друга и решения подзадач можно просто накладывать. В этом основная трудность использования данного метода, которая порой приводит к ошибкам.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные задачи, поддающиеся решению указанным методом.

Задача 1. *Центр проводящего шара радиусом a, несущего заряд Q, находится на расстоянии R от точечного заряда q. Найдите потенциал φ шара, если a и R сравнимы друг с другом ($a < R$).*

Решение. Поскольку объем шара эквипотенциален, достаточно найти потенциал какой-либо его точки, например центра. Для этого разобьем заряд шара Q на малые элементы (точечные заряды) и применим общую формулу для потенциала, созданного произвольным распределением заряда в любой точке поля M:

$$\varphi(M) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{r_i},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ ед. СИ, Δq_i – i-й точечный заряд, а r_i – расстояние от него до исследуемой точки поля. В нашем случае

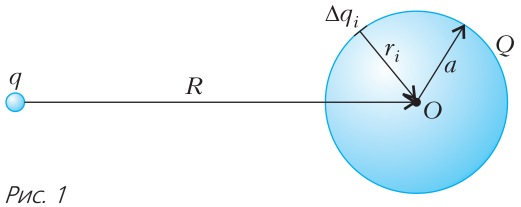


Рис. 1

(рис.1) для зарядов Δq_i на шаре все расстояния одинаковы: $r_i = a = \text{const}$, так что

$$\varphi = k\left(\frac{q}{R} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{a}\right) =$$

$$= k\left(\frac{q}{R} + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\Delta q_i\right) = k\left(\frac{q}{R} + \frac{Q}{a}\right). \quad (*)$$

Попытаемся теперь представить решение данной задачи в виде наложения решений двух более простых задач: *незаряженный* шар в поле точечного заряда и *уединенный* заряженный шар.

Вообще, единственным условием, которому подчиняется распределение зарядов на поверхности системы проводников, является равенство нулю напряженности поля в каждой точке внутри каждого проводника. Теорема единственности утверждает, что такое распределение всегда существует и оно единственно, т.е. других распределений, удовлетворяющих данному условию, нет.

Заряд q индуцирует на незаряженном шаре некое неравномерное распределение зарядов с поверхностной плотностью $\sigma(M)$, причем, очевидно, система зарядов $\{q, \sigma(M)\}$ не создает поля внутри шара (рис.2). В этом случае, полагая в $(*)$ $\sum_{i=1}^{n}\Delta q_i = 0$, получаем первое слагаемое ответа. (Точное решение – расчет поля $\vec{E}$ и $\sigma(M)$ – может быть получено методом изображений; см., например, [2], с.124–126.) Если теперь на уединенный шар поместить заряд Q, то он, распределившись *равномерно* по поверхности шара, тоже не даст поля внутри. Этой ситуации соответствует второе слагаемое ответа. Поскольку оба распределения (порознь) не дают поля внутри, простая их суперпозиция (без взаимного искажения) его там тоже не даст и, в силу теоремы единственности, никаких других распределений здесь возникнуть не может.

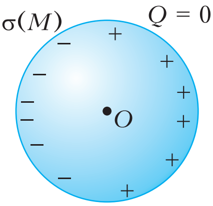


Рис. 2

Замечание. Из проведенных рассуждений следует, что при внесении *незаряженной* проводящей сферы (шара) в *любое* заданное поле на ней индуцируются заряды, поле которых накладывается на внешнее. В результате потенциалы всех точек поля изменятся, *кроме одной*. Это *центр сферы*, где потенциал сохранит прежнее значение.

Задача 2. *Две проводящие сферы радиусами r_0 и $R = 3r_0$, расположенные одна внутри другой, как показано на рисунке 3,*

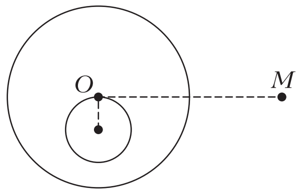


Рис. 3

заряжены зарядами q и Q соответственно. Найдите напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ электрического поля в точке M, отстоящей от центра O большей сферы на расстояние 2R, которое отсчитано в направлении, перпендикулярном линии центров.

Решение. На первый взгляд задача кажется трудной: заряженные сферы будут влиять друг на друга, распределения зарядов на них окажутся неравномерными и непонятно, как искать поле и потенциал в точке M. Для прояснения ситуации рассмотрим более общую задачу: проводник произвольной формы заключен в замкнутую проводящую оболочку тоже произвольной формы, причем все это находится в окружении неких зарядов. Какие особенности будут иметь поля внутри и снаружи оболочки, если ее и проводник зарядить какими-то зарядами?

Поместим на проводник и окружающую его оболочку произвольные заряды q_1 и q_2 (рис.4,*а*). Эти заряды так разместятся на трех имеющихся поверхностях S_1, S_2 и S_3, что поле в каждой точке проводника и оболочки обратится в ноль. При этом заряд q_2 оболочки разделится вполне определенным образом между внутренней и внешней ее поверхностями: на внутренней появится заряд $-q_1$, а оставшийся заряд $+(q_1 + q_2)$ уйдет на внешнюю. Действительно, выбирая замкнутую поверхность S, целиком находящую-

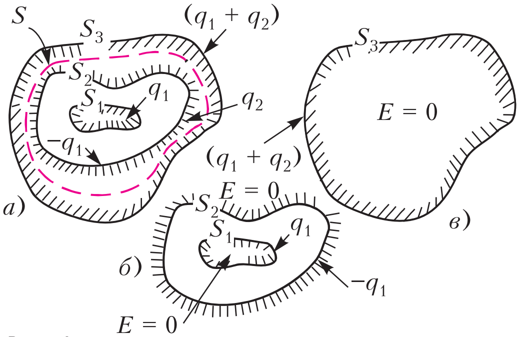


Рис. 4

ся в толще оболочки (где $E = 0$), и применяя к ней теорему Гаусса, мы получим, что из равенства нулю потока через эту поверхность следует равенство нулю полного заряда внутри нее. Таким образом, если на проводнике находится заряд q_1, то заряд $-q_1$ должен появиться на внутренней поверхности оболочки.

Попытаемся теперь представить рассматриваемую картину распределения заряда (и созданного им поля) в виде суперпозиции картин двух более простых распределений, изображенных на рисунках 4,*б* и *в*. Первая картина получается, если все пространство снаружи оболочки заполнить проводником. При этом останутся лишь две поверхности S_1 и S_2, заряженные зарядами q_1 и $-q_1$, и поле между ними. Во всем остальном пространстве, т. е. внутри S_1 и снаружи S_2, система зарядов $\{q_1, -q_1\}$ *поля не создает*. Для реализации второй картины заполним проводником всю область внутри оболочки. Тогда останется поверхность S_3 с зарядом $q_1 + q_2$ и все остальные (внешние) заряды, размещенные вне оболочки произвольным образом. Эта система зарядов дает отличное от нуля поле только снаружи поверхности S_3, *внутри* нее в каждой точке $E = 0$.

Итак, мы имеем две системы зарядов $\{q_1, -q_1\}$ и $\{q_1 + q_2$, остальные заряды$\}$, причем первая система не создает поля там, где находятся заряды второй системы, а вторая не возбуждает его в местах расположения зарядов первой. Значит, при наложении этих распределений они не почувствуют друг друга, а потому никак друг друга не исказят. При этом поля их сложатся в каждой точке, и там, где оба распределения порознь давали нулевое поле, оно нулевым и останется. Следовательно, после наложения будут две области нулевого поля: внутри S_1 и между S_2 и S_3. Но это как раз области, занимаемые проводником и окружающей его оболочкой. Таким образом, найденное распределение заряда, давая нулевое поле внутри проводника и оболочки, является решением поставленной задачи и, в силу теоремы единственности, решением единственным.

Пространства внутри и вне оболочки оказываются совершенно не связанными друг с другом: любые перемещения проводника внутри оболочки, приводя лишь к перераспределению заряда на ее внутренней поверхности, никак не скажутся на полях и распределениях заряда снаружи и наоборот.

Вернемся теперь к нашей задаче. Из сказанного следует, что положение малой сферы внутри большой совершенно не влияет на поле снаружи. Оно будет создаваться *равномерно* распределенным по внешней поверхности большей сферы зарядом $q + Q$, т.е. будет сферически симметричным и определяться законом Кулона для точечного заряда указанной величины, расположенного в центре большой сферы. Стало быть, искомые величины напряженности и потенциала соответственно равны

$$E = k\frac{q+Q}{4R^2} \quad \text{и} \quad \varphi = k\frac{q+Q}{2R}.$$

Задача 3. *К уединенному незаряженному плоскому воздушному конденсатору емкостью C снаружи подносят точечный заряд q, располагая его на расстоянии a, много меньшем размеров обкладок конденсатора, и далеко от их краев. Найдите напряжение U на конденсаторе.*

Решение. При приближении точечного заряда q к правой пластине конденсатора на ее наружной поверхности индуцируется заряд противоположного знака (см., например, [2], с.122–124), распределенный (неравномерно) с какой-то поверхностной плотностью $\sigma(M)$ (рис.5). Эта система зарядов $\{+q, \sigma(M)\}$ не создает поля нигде левее наружной поверхности правой обкладки (т.е. в толще пластин $E = 0$). Используя метод отражений и теорему Гаусса, нетрудно показать, что полный наведенный заряд, соответствующий плотности $\sigma(M)$, в точности равен $-q$. Поскольку правая обкладка не заряжена, на ней высвобождается заряд $+q$, который уже будет создавать поле внутри (и

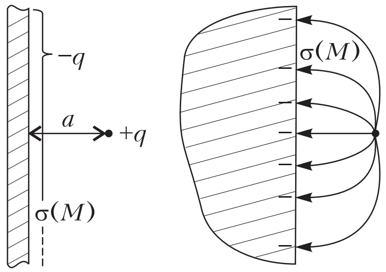


Рис. 5

вне) конденсатора и в свою очередь наведет на поверхностях левой обкладки некие заряды (в сумме равные нулю). Эти заряды вместе с высвободившимся зарядом $+q$ так распределятся на четырех имеющихся поверхностях, чтобы тоже не создавать поля в толще каждой из обкладок. Величины этих зарядов легко угадываются (хотя могут быть найдены с помощью элементарного расчета). Это, если идти слева направо, $+\frac{q}{2}$, $-\frac{q}{2}$, $+\frac{q}{2}$ и $+\frac{q}{2}$ (рис.6). Так как ни одна из

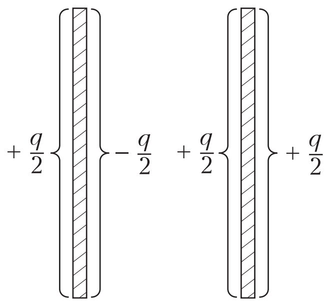


Рис. 6

приведенных подсистем зарядов не создает поля ни в одном из проводников, простая их (подсистем) суперпозиция (без взаимного искажения) его там тоже не даст и, стало быть, будет иметь место в действительности. Таким образом, поле внутри конденсатора возбуждается только зарядами $\pm\frac{q}{2}$ на внутренних сторонах обкладок, а значит,

$$U = \frac{q/2}{C} = \frac{q}{2C} .$$

Задача 4. *В точке A, расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R, находится точечный заряд q. Сферу заземляют длинным тонким проводником (рис.7). На сколько изменится (после заземления) потенциал φ точки B, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO?*

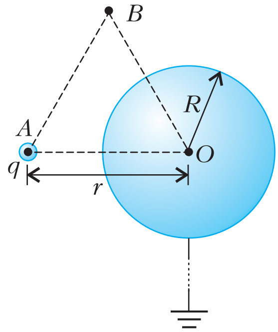


Рис. 7

Решение. До заземления заряд q индуцирует на сфере некое неравномерное распределение заряда с плотностью $\sigma(M)$, дающее вместе с q нулевое поле в любой точке внутри проводника – стенок сферы (а стало быть, и внутри всей сферы). После заземления на сфере появляется заряд $Q = -\frac{R}{r}q$ (зануляющий ее потенциал), который, очевидно, распределится *равномерно* по ее поверхности, поскольку только в этом случае он не создаст поля внутри сферы. Таким образом, появление заряда Q не нарушит распределения напряженности и потенциала в пространстве, созданные системой зарядов $\{q, \sigma(M)\}$, а лишь наложит на них собственные сферически симметричные распределения $\vec{E}(M)$ и $\varphi(M)$. Значит, потенциал точки B изменится на величину

$$\Delta\varphi = k\frac{Q}{r} = -k\frac{Rq}{r^2} .$$

Так же легко находим изменение вектора напряженности поля в точке B:

$$\Delta\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{e} = -k\frac{Rq}{r^3}\vec{e} ,$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный от O к B.

Приведенные примеры, конечно, не исчерпывают все возможности применения принципа наложения при решении электростатических задач.

Литература

1. *Г.Я.Мякишев, А.З.Синяков, Б.А.Слободсков.* Физика. Электродинамика. 10–11 классы. Профильный уровень. – М.: Дрофа, 2007.

2. *Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 5. – М.: Мир, 1966.

XL Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. (3)[1] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равны 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

А.Шаповалов

2. (4) По кругу лежат $2n + 1$ монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n + 1$ переворотов: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую и т.д., наконец, пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

В.Расторгуев

3. (4) Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m + n \le n^2$.

Б.Френкин

4. (5) В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC, а концы основания – на отрезках AB и CD. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

И.Жижилкин

5. (5) Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К.Кноп

10–11 классы

1. (4) Расстояния от некоторой точки внутри правильного шестиугольника до трех его последовательных вершин равны 1, 1 и 2 соответственно. Чему равна сторона этого шестиугольника?

М.Евдокимов

2. (4) Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n. Обязательно ли тогда $a = b$?

Б.Френкин

3. (4) Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 2019 четырехугольников, каждый из которых одновременно вписанный и описанный.

Н.Седракян

4. (5) См. задачу 5 для 8–9 классов, только теперь в ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок.

5. (5) В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 2019. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равны 40. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

А.Шаповалов

Сложный вариант

8–9 классы

1. (5) Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвертое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли муд-

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

рецы гарантированно справиться с заданием?

М.Евдокимов

2. (7) См. задачу М2558 «Задачника «Кванта».

3. (7) См. задачу М2559а «Задачника «Кванта».

4. (8) Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

И.Богданов

5. (9) В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, оказались в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

А.Грибалко

6. (9) Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и угол KAC равен $30°$. Найдите угол AKB.

Е.Бакаев

7. (12) Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

М.Дидин

10–11 классы

1. (5) На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если ее впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, то получится число, делящееся на 7.

А.Галочкин

2. (6) См. задачу М2558 «Задачника «Кванта».

3. (7) См. задачу М2559б «Задачника «Кванта».

4. (8) См. задачу 5 сложного варианта для 8–9 классов.

5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1.

а) (4) Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

б) (4) А квадрат площади $1/2019$?

М.Евдокимов

6. (8) Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \le x_1 \le \ldots \le x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

И.Богданов

7. (12) См. задачу М2561 «Задачника «Кванта».

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. В таблице $n \times n$ стоят все целые числа от 1 до n^2, по одному в клетке. В каждой строке числа возрастают слева направо, в каждом столбце – снизу вверх. Докажите, что наименьшая возможная сумма чисел на главной диагонали, идущей сверху слева вниз направо, равна $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Б.Френкин

2. Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км?

М.Евдокимов

3. Можно ли замостить плоскость параболами, среди которых нет равных? (Требуется, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одной параболе и чтобы ни одна парабола не переводилась ни в какую другую параболу движением.)

А.Лопатников

4. Про натуральные числа x, y и z известно, что $\text{НОД}(x,y,z)=1$ и $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)$. Докажите, что x, y и z – квадраты натуральных чисел.

Ю.Маркелов

5. См. задачу М2560 «Задачника «Кванта».

6. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J. Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что $PA = PJ$.

П.Кожевников, А.Кузнецов

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников

LXXXII Московская математическая олимпиада

6 класс

1 [4][1], **2** [5], **3** [6], **4** [6]. См. задачи 1, 2, 3, 4 раздела «Квант» для младших школьников» в «Кванте» №3.

5 [8]. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 елок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растет сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растет сосна.

Е.Бакаев

6 [8]. Каждая грань куба $6\times6\times6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.)

А.Шаповалов

7 класс

1 [4], **2** [5], **3** [6]. См. задачи 1, 3, 2 раздела «Квант» для младших школьников» в «Кванте» №4.

[1] В квадратных скобках указано число баллов, присуждавшееся за полное решение задачи. Баллы ставились только в 6 и 7 классах.

4 [6]. Имеются три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?

А.Шаповалов

5 [9]. См. задачу 4 раздела «Квант» для младших школьников» в «Кванте» №4.

6 [9]. В ряд лежат 100 монет, часть – вверх орлом, а остальные – вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (т.е. семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т.д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом.

С.Токарев, А.Шаповалов

8 класс

1. Все таверны в царстве принадлежат трем фирмам. В целях борьбы с монополиями царь Горох издал следующий указ: каждый день, если у некоторой фирмы оказывается более половины всех таверн и число ее таверн делится на 5, то у этой фирмы остается только пятая часть ее таверн, а остальные закрываются. Могло ли так случиться, что через три дня у всех фирм стало меньше таверн? (Новые таверны в это время открываться не могут.)

И.Ященко, А.Шаповалов

2. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2+20n+19$ делится на 2019.

Д.Шноль

3. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB=BD$. Пусть точка M – середина боковой стороны CD, а O – точка пересечения отрезков AC и BM. Докажите, что треугольник BOC равнобедренный.

Л.Попов

4. См. задачу М2558 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 6 сложного варианта для 8–9 классов XL Турнира городов (весенний тур).

6. См. задачу 5 сложного варианта для 8 – 9 классов XL Турнира городов.

9 класс

1. См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов XL Турнира городов.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO.

Е.Бакаев

4. См. задачу 4 сложного варианта для 8–9 классов XL Турнира городов.

5. Биссектриса угла ABC пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках B и L. Точка M – середина отрезка AC. На дуге ABC окружности ω выбрана точка E так, что $EM \parallel BL$. Прямые AB и BC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PE=EQ$.

Е.Бакаев

6. См. задачу 7 сложного варианта для 8–9 классов XL Турнира городов.

10 класс

1. Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 – если зачеркнуть в исходном числе третью цифру, ..., делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.

М.Евдокимов

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. См. задачу М2558 «Задачника «Кванта».

4. Каждая точка плоскости раскрашена в один из трех цветов. Обязательно ли найдется треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?

О.Косухин

5. См. задачу 6 сложного варианта для 10–11 классов XL Турнира городов.

6. См. задачу М2561 «Задачника «Кванта».

11 класс

Первый день

1. Пусть $f(x)=x^2+3x+2$. Вычислите

$$\left(1-\frac{2}{f(1)}\right)\left(1-\frac{2}{f(2)}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{f(2019)}\right).$$

М.Евдокимов

2. См. задачу 1 сложного варианта для 10–11 классов XL Турнира городов.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $\left|\sqrt[n]{m}-\sqrt[m]{n}\right|>\frac{1}{mn}$.

Д.Горяшин

5. См. задачу 5а сложного варианта для 10–11 классов XL Турнира городов.

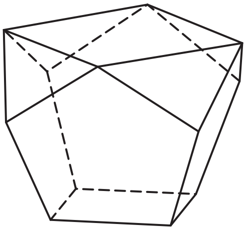
6. См. задачу М2561 «Задачника «Кванта».

Второй день

1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n>1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

Д.Горяшин

2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y=\frac{a}{x}$, что в первой



координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

А.Бегунц

3. У многогранника, изображенного на рисунке, грани – четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?

А.Попов

4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geq 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots + a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

О.Косухин

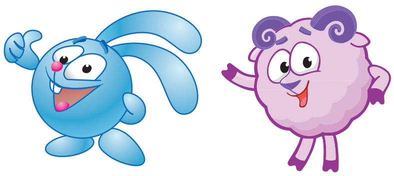
5. На доске написаны несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?

И.Шейпак

Публикацию подготовили С.Дориченко, Е.Епифанов

Всероссийская олимпиада по физике имени Дж.К.Максвелла

Maxwell PhO



Заключительный этап

Теоретический тур

7 класс

Задача 1. Крош и Бараш

Выйдя из дома, Крош и Бараш пустились наперегонки по тропинке к озеру. Бараш все время бежал с постоянной скоростью v, а Крош вначале решил дать фору Барашу и первую четверть пути двигался со скоростью $0{,}8v$, затем увеличил ее до $1{,}5v$, но в конце пути устал и побежал со скоростью $0{,}9v$, проиграв в результате Барашу. Какой могла быть длина второго участка, пройденного Крошем, если он догнал Бараша через время τ после старта, и на какое максимальное время t_0 Бараш мог опередить Кроша на финише?

А.Заяц

Задача 2. Пена

В горизонтальный цилиндр с подвижным поршнем (рис.1,*а*) через штуцер *Ш* поступает пена с постоянным массовым расходом $\mu = 0{,}1$ кг/с. График зависимости средней плотности $\rho_{ср}$ содержимого цилиндра от времени t приведен на рисунке 1,*б*. С какой максимальной и с какой минимальной скоро-

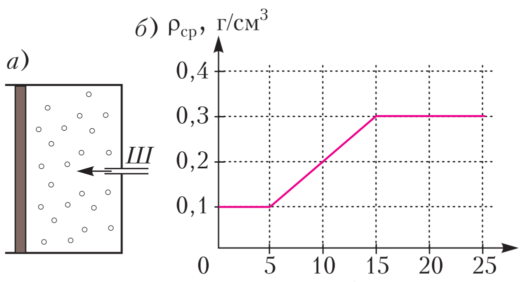


Рис. 1

стью двигался поршень в процессе заполнения, если его площадь $S = 1$ дм^2? За какое время τ объем пены в цилиндре увеличился до $V = 7$ дм^2?

М.Замятнин

Задача 3. Поршни

Цилиндрические части закрепленного между двумя стенками сосуда, изображенного на рисунке 2, имеют длину l и площади сечения

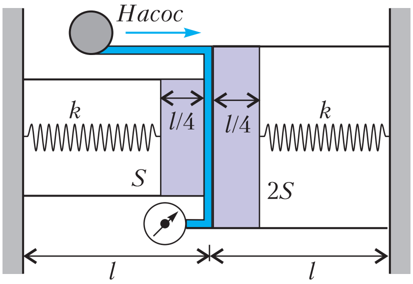


Рис. 2

S и $2S$. В сосуде находятся два поршня толщиной $l/4$ каждый, соединенные со стенками одинаковыми пружинами жесткостью k. Длина каждой пружины в недеформированном состоянии l. В зазор между поршнями через маленькую трубочку может закачиваться легкая жидкость, давление которой измеряется с помощью манометра. Трения между поршнями и стенками сосуда нет. Силы давления газа в системе можно не учитывать. Соприкасающиеся поверхности поршней шероховатые, поэтому жидкость свободно проникает между ними. Какое давление будет показывать манометр в момент, когда поршни отделятся друг от друга? Какой объем жидкости необходимо закачать через трубочку в сосуд, чтобы манометр показал давление: а) $p = p_0/10$; б) $p = p_0/3$? Здесь $p_0 = kl/S$.

А.Аполонский

Задача 4. Упругий цикл

К пружине прикладывается направленная вдоль ее оси растягивающая сила F. На графике (рис.3) изображен циклический процесс *1–2–3–4–1*, показывающий, как последовательно изменялась величина этой силы в зависимости от координаты x конца пружины, к которому она приложена. Известно, что абсолютное удлинение Δl пружины за цикл достигало максимального значения $\Delta l_{max} = 12$ см, а работа силы F за цикл

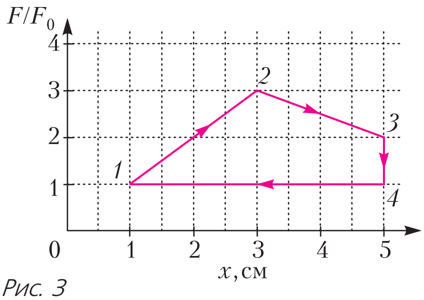


Рис. 3

оказалась положительной и равной $A = 0{,}5$ Дж. Определите минимальное абсолютное удлинение Δl_{min} пружины за цикл. Найдите жесткость k пружины и постройте качественный график зависимости координаты $x_ц$ центра пружины от координаты x конца, к которому приложена сила F. Длина пружины в недеформированном состоянии $l_0 = 20$ см.

М.Замятнин

8 класс

Задача 1. UnCl

Экспериментатор Глюк решил исследовать растворимость нового вещества – хлорида унобтания (UnCl). Для этого он стал добавлять с постоянным массовым расходом μ порошок UnCl в мерный сосуд с $V_0 = 100$ мл воды, постоянно помешивая раствор. На рисунке 4 изображен график зависимости плотности раствора UnCl от концентрации (массы растворенного вещества в литре воды), полученный британскими коллегами Глюка. При концентрации $n_0 = 750$ г/л хлорид унобтания перестает растворяться в воде. Плотность кристаллического нового вещества $\rho = 2{,}5$ г/см^3, плотность воды $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3.

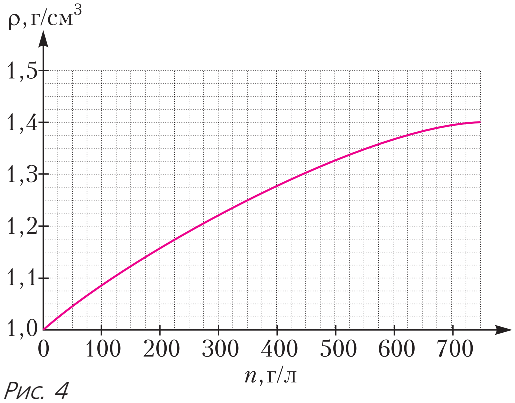


Рис. 4

1) Определите массу насыпанного порошка UnCl, когда объем содержимого мерного сосуда стал равен: а) 110 мл; б) 150 мл.

2) Определите массовый расход μ (выразив его в г/с), если в начале эксперимента объем содержимого мерного сосуда увеличивался со скоростью 0,10 мл/с.

А.Заяц

Задача 2. Вторая ступень

На рисунке 5 приведена схема очень длинной подвесной лестницы. Массы каждой из

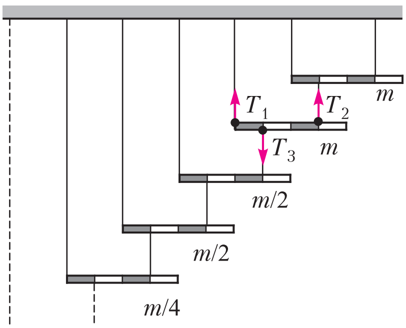


Рис. 5

двух первых ступеней равны m, а в последующих парах массы ступеней уменьшаются в два раза по отношению к предыдущим ($m/2, m/4, m/8, \ldots$). Определите силы натяжения тросов T_1, T_2 и T_3, действующих на вторую ступень, считая все ступени однородными, а тросы легкими. На рисунке 5 каждая ступень разделена на четыре одинаковые части.

М.Замятнин

Задача 3. Лед

На столе стоит высокий цилиндрический сосуд с водой, в котором с помощью закрепленной на дне нити удерживается полностью погруженная в воду льдинка, а на поверхности воды плавает небольшой плотик с встроенным термометром (рис.6,*а*). Система находится в тепловом равновесии. В сосуд начинают добавлять горячую воду при температуре $t_1 = 99\ ^\circ\mathrm{C}$ с массовым расходом $\mu = 2{,}0$ г/с. Считая процессы теплообмена быстрыми, постройте качественный график зависимости скорости подъема верхней границы столбика термометра относительно стола от времени, указав на нем характерные точки. Вода из сосуда не выливается. Потерями тепла, теплоемкостью термометра и плотика можно пренебречь. Площадь дна сосуда $S = 20\ \mathrm{см}^2$. Вначале в сосуде было $m = 400$ г воды, а сила натяжения нити равнялась $T = 0{,}07$ Н. Во время таяния лед не всплывал. На рисунке 6,*б* приведен укрупненный фрагмент шкалы термометра, к которой приложена линейка. Удельная теплоемкость воды $c_0 = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, плотность льда $\rho = 0{,}9\ \mathrm{г/см}^3$, плотность воды $\rho_0 = 1{,}0\ \mathrm{г/см}^3$, ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

М.Замятнин

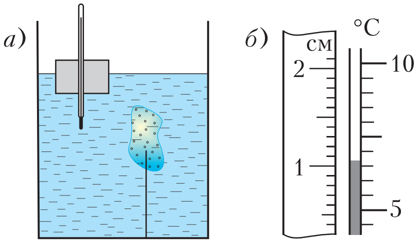


Рис. 6

Задача 4. Мост

В электрической цепи, содержащей источник постоянного тока I_0 (рис.7) на двух одинаковых резисторах выделяется мощ-

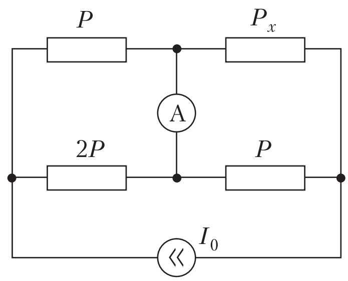


Рис. 7

ность $P = 0{,}5$ Вт, а на двух других – мощности $2P$ и P_x. При этом через идеальный амперметр протекает ток силой $I_A = 25$ мА. Определите значение мощности P_x, сопротивления всех резисторов и напряжения на них. Найдите значение I_0 источника.

Примечание. Источником постоянного тока называют активный элемент электрической цепи, через который протекает ток силой I_0 при подключении к нему резисторов с различными в широком диапазоне сопротивлениями.

В.Слободянин

Публикацию подготовил В.Слободянин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. В первый чемодан надо посадить тварей весом 10, 4, 3 фунта; во второй – 9, 7, 2 фунта; в третий – 8, 6, 5 фунтов.

Комментарий. Найти ответ (и доказать, что он единственен) можно следующим образом. Тварей с весами 10, 9 и 8 фунтов необходимо поместить в разные чемоданы (иначе один чемодан будет слишком тяжелым). Далее, чтобы никто не подрался, тварь весом 2 фунта необходимо поместить во второй из этих чемоданов, а тогда тварь весом 4 фунта – в первый. После этого нетрудно распределить и оставшихся тварей.

2. 120°, 45°, 15°.

Заметим, что треугольник MAD тоже равен треугольнику MAB – по трем сторонам: сторона MA у них общая, $AD = AB$ как стороны квадрата, $MD = MB$ по условию (лежат напротив соответственных углов в равных треугольниках). Значит, $\angle BAM = \angle MAD = 90°/2 = 45°$. В точке M сходятся три соответственных угла равных треугольников, поэтому $\angle AMB = 360°/3 = 120°$. Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому, $\angle ABM = 180° - 120° - 45° = 15°$.

3. Слоны едят только круглые арбузы.

Выясним сначала, сколько арбузов ест на завтрак каждое из животных. По условию 5 слонов и 7 бегемотов съедают 31 арбуз, а 8 слонов и 4 бегемота – 28 арбузов. Мы видим, что если заменить трех бегемотов на трех слонов, то требуется на три арбуза меньше. Значит, 12 слонов съели бы 31 – 7 = 24 арбуза (т.е. каждый по 2), а 12 бегемотов съели бы 31 + 5 = 36 арбузов (т.е. каждый по 3).

В первой группе бегемоты съели $7 \cdot 3 = 21$ арбуз. Столько арбузов одной формы не было, значит, бегемоты едят арбузы любой формы, а привередливы слоны. Во второй группе слоны съели $8 \cdot 2 = 16$ арбузов. Столько кубических арбузов не было, значит, слоны предпочитают именно круглые арбузы.

4. Примеры приведены на рисунке 1.

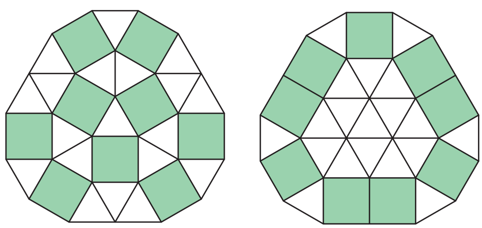


Рис. 1

Комментарии. 1. Сложность тут в том, что предлагается сложить фигуру довольно маленького периметра: даже если складывать многоугольник только из квадратов, то получится периметр не меньше 12 см, а надо еще добавить целых 19 треугольников.

Из всех фигур, имеющих данную площадь, наименьший периметр имеет круг. Поэтому если такой многоугольник существует, то, видимо, он должен быть близок к кругу.

Кстати, можно подсчитать, что периметр круга, равновеликого нашему многоугольнику, составляет примерно 14,7 см. Так что получить многоугольник еще меньшего периметра невозможно.

2. Угол при вершине квадрата – половина развернутого, а при вершине правильного треугольника – треть развернутого. Поэтому во внутренней вершине могут сходиться либо 6 треугольников, либо 3 треугольника и 2 квадрата, либо 4 квадрата (это помогает проверить, возможна ли в действительности нарисованная от руки картинка).

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №3)

25. Можно.

Расставим числа так: 2, 4, 6, …, 100, 99, 97, … …, 1 (сначала все четные числа в порядке возрастания, а потом нечетные в порядке убывания). На самом деле такая расстановка единственна (с точностью до поворота и направления обхода).

26. Верно.

Отметим точки K и M на сторонах AC и BC так, что $KM \parallel AB$ (рис.2). Пусть серединный перпендикуляр к KM пересекает сторону AB в точке P. Теперь выберем на стороне AB точки L и N, симметричные относительно P. Тогда отрезки KM и LN будут основаниями искомой трапеции.

Пара моментов в решении требуют дополнительного внимания. Во-первых, чтобы эта равнобокая трапеция не оказалась прямоугольником,

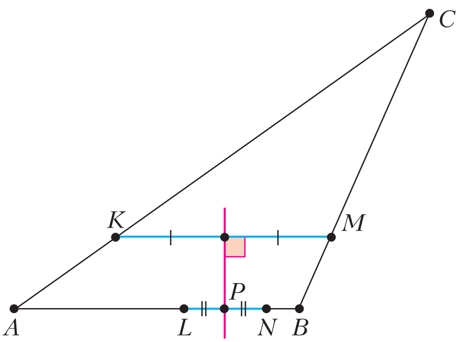


Рис. 2

надо выбрать $LN \neq KM$. Этого можно добиться благодаря свободе выбора точек L и N.
Во-вторых, если один из углов A и B тупой, то не любой отрезок KM подходит: серединный перпендикуляр к KM может не пересекать сторону AB. Покажем, что существует подходящий отрезок KM. Если в качестве KM выбрать отрезок AB, то P будет серединой AB. Значит, если выбрать отрезок KM достаточно близко к AB, то и точка P будет находиться достаточно близко к середине отрезка AB, т.е. будет лежать на нем.
27. Будем обходить таблетки по часовой стрелке, тогда обязательно найдутся две хорошие таблетки рядом, сразу за которыми лежит плохая. Первый мудрец берет первую таблетку, второй – вторую, а третья (плохая) запоминается и мысленно выбрасывается. После чего задача сводится к такой же с меньшим числом таблеток, причем отношение хороших таблеток к плохим неизменно 2 к 1, и алгоритм повторяется.
28. $n(n+1)$.
Пример. Пронумеруем все столбцы доски по порядку. Каждый нечетный столбец целиком займем одним кораблем. Таким образом будет занята половина клеток. Это количество нетрудно посчитать.
Оценка. Две соседние по диагонали клетки не могут быть ни в разных кораблях, ни в одном. Покажем, что все клетки доски можно поделить на пары соседних по диагонали клеток. Из этого будет следовать, что занято не больше половины клеток.
Данную в условии доску назовем *бриллиантом* порядка n. (*Ацтекский бриллиант* – принятое в комбинаторике название такой фигуры.)
Докажем по индукции, что бриллиант порядка n делится на диагональные пары клеток. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть бриллиант порядка $k - 1$ делится на такие пары клеток. Вырежем его из бриллианта порядка k (на рисунке 3 показан пример для $k = 4$). Останется область, которую можно представить в виде двух цепочек клеток, где соседние клетки соседствуют по диагонали (красная и желтая цепочки на рисунке

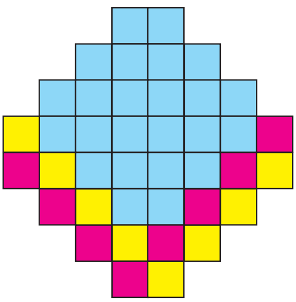


Рис. 3

3). В каждой из них по $2k$ клеток – четное количество, а значит, их можно разбить на пары соседних по диагонали клеток. Таким образом, переход индукции от $k - 1$ к k доказан.

ДИАГОНАЛЬ КЛЕТЧАТОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

1. Видимо, потому что в сетке (не математической, а рыболовной, например) нити связаны узлами.
2. 100.
На 5 делится $\frac{300}{5} = 60$ чисел, на 6 делится $\frac{300}{6} = 50$ чисел. При сложении этих количеств дважды учитываются числа, которое делятся и на 5, и на 6 одновременно; таких чисел $\frac{300}{5 \cdot 6} = 10$.
Итого получается $60 + 50 - 10 = 100$ чисел.
3. $\text{НОД}(a,b)$.
Если поделить все на b, получится задача 2.
4. $\left[\frac{b-1}{2}\right]$, если r представляется в виде несократимой дроби как $\frac{a}{b}$.
Это количество равно количеству пересечений «выпрямленной» траектории с каждой второй вертикальной линией сетки.
5. Нет.
В этом случае $r = \text{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а это иррациональное число.
6. Нет.
«Распрямим» траекторию аналогично тому, как это было сделано в задаче 4. Тогда шар будет двигаться по прямой $y = x$, а узлы получившейся решетки будут иметь вид $\left(\sqrt{2}m, n\right)$, где m и n – целые. Одна координата таких узлов иррациональна, а другая рациональна, поэтому на прямой $y = x$ узлов не будет.
7. Снова «распрямим» траекторию, как в задаче 4. Лузы бильярда, многократно отраженные относительно сторон, будут образовывать прямоугольную решетку с шагом q по горизонтали и p по вертикали. Шар будет двигаться по прямой $y = x$, т.е. через точки вида (m,m). Точка (m,m) является узлом, если m делится и на p, и на q, значит, первым таким узлом будет $m = \text{НОК}(p,q)$, а это нечетное число, поэтому эта точка соответствует средней лузе.
8. $\text{НОД}(a,b,c)-1$ узлов, не считая концов диагонали.
Можно действовать так же, как в третьем решении задачи 1. Узлы делят диагональ на равные части. Плоскости первого направления делят диагональ на a равных частей, второго – на b, третьего – на c. Тогда узлы делят диагональ на $\text{НОД}(a,b,c)$ частей.

9. Диагональ прямоугольника $p \times q$ делится линиями сетки на $p + q - \text{НОД}(p,q)$ частей. Поделим пирог на части так, чтобы массы кусков были пропорциональны длинам отрезков на диагонали.

10. $\frac{p+1}{q}\left(\sqrt{p^2+q^2}+p+q\right)$.

Перенесите все отрезки диагонали в один квадратик, как в решении задачи 6.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ ИМЕНИ ДЖ.К.МАКСВЕЛЛА

7 класс

1. Длина второго участка будет максимальной, когда Бараш обгонит Кроша практически на самом финише; $s_{2\max} = \frac{3v\tau}{4}$. Длина второго участка минимальна, когда Крош закончит движение со скоростью $1{,}5v$ в момент обгона Бараша (в момент времени τ); $s_{2\min} = \frac{3v\tau}{7}$. Отставание Кроша от Бараша будет максимальным; когда s_2 будет минимальным; $t_0 = \frac{\tau}{7}$.

2. На первом участке графика плотность пены постоянна и равна $\rho_1 = 0{,}1\ \text{г/см}^2$. Объем пены в этом случае изменяется по закону $V_1(t) = \frac{\mu t}{\rho_1}$. Так как объем изменяется равномерно, скорость движения поршня равна $v_1 = \frac{\mu}{\rho_1 S} = 10\ \text{см/с}$.

На втором участке плотность пены изменяется линейно. Для этого случая $V_2(t) = \frac{\mu t}{\rho_2(t)} = 5000\ \text{см}^3$. Так как на этом участке объем постоянен, скорость движения поршня равна нулю: $v_2 = 0$.

На третьем участке плотность пены постоянна и равна $\rho_3 = 0{,}3\ \text{г/см}^3$, скорость движения поршня составляет $v_3 = \frac{\mu}{\rho_3 S} = 3{,}3\ \text{см/с}$.

Таким образом, минимальная скорость поршня равна нулю, а максимальная составляет 10 см/с. Объем пены $V = 7\ \text{дм}^3$ превышает объем V_2 на втором участке, поэтому в момент времени τ плотность пены равна $\rho_3 = 0{,}3\ \text{г/см}^3$. Отсюда

$$\tau = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho_3 V}{\mu} = 21\ \text{с}.$$

3. В исходном положении без жидкости обе пружины сжаты на $l/4$ и поршни упираются друг в друга. При закачивании первых порций жидкости оба поршня движутся вправо, по-прежнему сохраняя контакт. Пусть x – смещение поршней. Запишем условие равновесия системы:

$$k\left(\frac{l}{4} - x\right) + p(2S - S) = k\left(\frac{l}{4} + x\right),$$

откуда $p = \frac{2kx}{S} = \frac{2p_0 V}{V_0}$, где $V_0 = lS$.

Контакт между поршнями исчезает, если сила давления жидкости на поршни равна силе упругости соответствующих пружин. Происходит это при смещении поршней вправо на некоторое расстояние x_1 при давлении p_1. При этом

$$p_1 S = k\left(\frac{l}{4} - x_1\right), \text{ и } p_1 \cdot 2S = k\left(\frac{l}{4} + x_1\right),$$

откуда

$$p_1 = \frac{kl}{6S} = \frac{p_0}{6},\ x_1 = \frac{l}{12},\ \text{ и }\ V_1 = Sx_1 = \frac{Sl}{12} = \frac{V_0}{12}.$$

На следующем этапе поршни начинают разъезжаться в разные стороны. Пусть y_1 и y_2 – смещения левого и правого поршня соответственно. Запишем условия равновесия поршней:

$$pS = k\left(\frac{l}{4} + y_1\right),\ p \cdot 2S = k\left(\frac{l}{4} + y_2\right),$$

откуда $2y_1 - y_2 = \frac{kl}{4}$.

Объем залитой воды при этом равен $V = Sy_1 + 2Sy_2$, поэтому

$$y_1 = l\left(\frac{V}{5V_0} - \frac{1}{10}\right),\ y_2 = l\left(\frac{2V}{5V_0} + \frac{1}{20}\right).$$

Теперь находим давление жидкости в сосуде:

$$p = \frac{k}{S}\left(\frac{l}{4} + y_1\right) = p_0\left(\frac{V}{5V_0} + \frac{3}{20}\right).$$

Давление $\frac{p_0}{10} < p_1$ соответствует случаю а), поэтому

$$\frac{p_0}{10} = \frac{2p_0 V_\text{а}}{V_0},\ \text{ и }\ V_\text{а} = \frac{V_0}{20} = \frac{lS}{20}.$$

Давление $\frac{p_0}{3} > p_1$ соответствует случаю б), тогда

$$\frac{p_0}{3} = p_0\left(\frac{V_\text{б}}{5V_0} + \frac{3}{20}\right),\ \text{ и }\ V_\text{б} = \frac{11V_0}{12} = \frac{11lS}{12}.$$

4. Максимальная и минимальная силы упругости пружины отличаются в 3 раза, следовательно, минимальная деформация в 3 раза меньше максимальной и составляет $\Delta l_{\min} = 4$ см. При этом на участке *1–2* конец пружины, к которому приложена сила F, смещается на 2 см, а противоположный конец пружины смещается на 6 см.

Работа A силы F за цикл пропорциональна площади внутри цикла и в условных единицах составляет $F_0 \cdot 5\ \text{см}$. Это позволяет найти силу F_0: $F_0 = 10$ Н и жесткость пружины: $k = F_0/\Delta l_{\min} = 250\ \text{Н/м}$.

Координаты центра пружины можно найти по формуле $x_\text{ц} = x - 0{,}5(l + \Delta l)$, где $\Delta l = F/k$. График зависимости $x_\text{ц}$ от x приведен на рисунке 4.

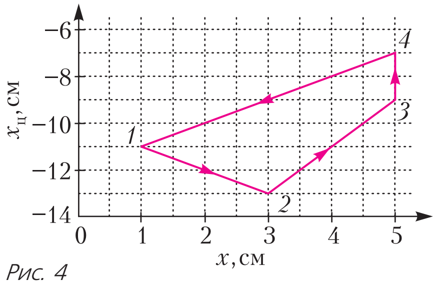


Рис. 4

8 класс

1. 1) Найдем объем насыщенного раствора (75 г UnCl в 100 мл воды):

$$V_{нас} = \frac{175 \text{ г}}{1,4 \text{ г/см}^3} = 125 \text{ см}^3 .$$

В первом случае $V < V_{нас}$. Пусть m – масса засыпанного в воду порошка UnCl. Запишем выражение для плотности раствора:

$$\rho = \frac{m_{воды} + m}{V} = \frac{100 \text{ г} + m}{110 \text{ см}^3} = \frac{100 \text{ г} + 0,1 \text{ л} \cdot n}{110 \text{ см}^3} ,$$

построим прямую, задаваемую этим уравнением, и найдем точку ее пересечения с графиком $\rho(n)$. Эта точка соответствует $n = (460 \pm 10)$ г/л, соответственно, $m = (46 \pm 1)$ г.

Во втором случае $V > V_{нас}$, причем 125 см^3 составляет насыщенный раствор, а остальные $V_{осад} = 25$ см^3 – нерастворившиеся кристаллы UnCl массой $m_{осад} = \rho_{крист} V_{осад} = 62,5$ г. Итоговая масса UnCl, насыпанного в сосуд, равна

$$m = 75 \text{ г} + 62,5 \text{ г} = 137,5 \text{ г}.$$

2) Пусть v – скорость увеличения объема раствора. Масса порошка UnCl в момент времени t от начала эксперимента равна $m = \mu t$. Объем раствора $V = V_0 + vt$, где $V_0 = 100$ см^3. Найдем разность плотностей раствора в момент времени t и чистой воды:

$$\rho - \rho_0 = \frac{\rho_0 V_0 + m}{V} - \rho_0 = \frac{m - \rho_0 (V - V_0)}{V} = \frac{\mu t - \rho_0 v t}{V}.$$

При малом t объем в знаменателе неотличим от V_0, поэтому

$$\rho - \rho_0 = \frac{(\mu - \rho_0 v)t}{V_0} .$$

В то же время при малой массе засыпанного порошка плотность раствора изменяется почти линейно, и $\rho - \rho_0 = kn = k\mu t / V_0$. Коэффициент наклона k определим по данному графику. Для этого построим касательную к кривой $\rho(n)$ при $n = 0$ и найдем тангенс угла ее наклона. Получается $k = 5/6$ (в безразмерных единицах). В результате, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{5}{6}\frac{\mu t}{V_0} = \frac{(\mu - \rho_0 v)t}{V_0} ,$$

откуда находим $\mu = 6\rho_0 v = 0,6$ г/с.

2. Рассмотрим силы, действующие на первую (верхнюю) и вторую ступени лестницы (рис.5), и запишем в каждом случае правило моментов относительно левого края ступени:

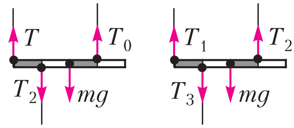


Рис. 5

$$T_2 l + mg \cdot 2l = T_0 \cdot 3l , \quad T_3 l + mg \cdot 2l = T_2 \cdot 3l ,$$

где l – длина одного деления ступени. Так как оставшаяся часть лестницы эквивалентна исходной конструкции, но имеет в 2 раза меньшую массу, то $T_0 = 2T_3$. В результате имеем

$$T_2 + 2mg = 6T_3 , \quad T_3 + 2mg = 3T_2 ,$$

откуда получаем

$$T_2 = \frac{14}{17} mg , \quad T_3 = \frac{8}{17} mg .$$

Величину силы T_1 найдем из условия равновесия второй ступени:

$$T_1 = T_3 + mg - T_2 = \frac{11}{17} mg .$$

3. Определим начальную массу льда m_0. Для этого запишем условие равновесия:

$$T + m_0 g = \rho_0 V g , \text{ где } V = m_0 / \rho ,$$

и получим

$$m_0 = \frac{T\rho}{(\rho_0 - \rho) g} = 63 \text{ г} .$$

Вначале все тепло, отводимое от горячей воды, идет на плавление льда, температура содержимого сосуда остается постоянной и столбик термометра неподвижен относительно поверхности воды. Пусть τ – время, прошедшее с начала эксперимента. Запишем уравнение теплового баланса: $c\mu\tau(t_1 - 0\ ^\circ\text{C}) = \lambda \Delta m_л$, где $\Delta m_л$ – масса расплавившегося льда. Поскольку плотность воды больше плотности льда, объем превратившегося в воду льда станет меньше на величину

$$\Delta V = \Delta m_л \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{c\mu\tau t_1 (\rho_0 - \rho)}{\lambda \rho_0 \rho} .$$

С другой стороны, объем воды, добавленной в сосуд за время τ, равен $\mu\tau/\rho_0$. Таким образом, общее изменение объема содержимого сосуда равно

$$\Delta V_{общ} = \frac{\mu\tau}{\rho_0} - \Delta V = \frac{\mu\tau}{\rho_0} \left(1 - \frac{c t_1 (\rho_0 - \rho)}{\lambda \rho} \right).$$

Скорость, с которой движется верхняя граница столбика термометра, равна в этом случае скорости подъема уровня воды:

$$v_1 = \frac{\mu}{\rho_0 S} \left(1 - \frac{c t_1 (\rho_0 - \rho)}{\lambda \rho} \right) = 0,8 \text{ мм/с} .$$

Этот процесс завершится, когда весь лед растает, т.е. через время $\tau_{max} = \frac{\lambda m_0}{c\mu t_1} = 25$ с. Общая масса воды в сосуде к этому моменту будет равна

$$m_{общ} = m + m_0 + v\tau_{max} = 513 \text{ г}.$$

После того, как весь лед растает, уровень воды в сосуде будет расти только за счет добавления в него горячей воды. Скорость подъема уровня в этом случае равна

$$v_2 = \frac{\mu}{\rho_0 S} = 1 \text{ мм/с}.$$

Кроме того, из-за повышения температуры содержимого сосуда столбик термометра станет подниматься относительно поверхности воды. Скорость его движения зависит от разности температур горячей воды и воды в сосуде. Она будет максимальной в начале этого процесса и равной нулю при нагреве содержимого до температуры $t_1 = 99$ °C.

Найдем скорость движения столбика термометра относительно воды в самом начале ее нагрева. Пусть $t_{уст}$ – температура воды, установившаяся через малое время $\Delta\tau$. Запишем уравнение теплового баланса:

$$c\mu\Delta\tau\left(t_1 - t_{уст}\right) = cm_{общ}\left(t_{уст} - 0\ ^\circ\text{C}\right).$$

Так как $t_{уст}$ мало, то $t_1 - t_{уст} \approx t_1$ и

$$t_{уст} = \frac{\mu\Delta\tau t_1}{m_{общ}}.$$

Из рисунка в условии следует, что увеличение температуры на 1 °C приводит к повышению столбика на 3 мм. Поэтому скорость подъема столбика относительно поверхности воды составляет

$$v_{ст} = \frac{(3\text{ мм/°C})\mu t_1}{m_{общ}} = 1{,}16 \text{ мм/с}.$$

Скорость подъема верхней границы столбика относительно стола в начале нагрева равна $v_3 = v_2 + v_{ст} = 2{,}16$ мм/с, а в конце нагрева равна $v_2 = 1{,}00$ мм/с.

График зависимости скорости подъема столбика термометра от времени приведен на рисунке 6.

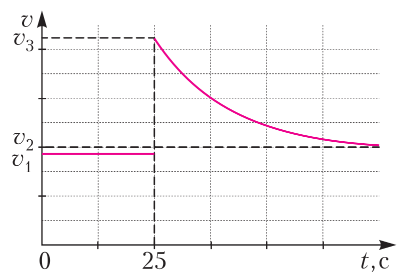


Рис. 6

4. Так как амперметр идеальный и мощности, выделяющиеся на двух одинаковых резисторах, равны, то через них текут одинаковые токи I_1 и падение напряжения на них равно половине разности потенциалов на источнике. Но тогда равны мощности и на двух оставшихся резисторах, так как через них текут тоже одинаковые токи $I_0 - I_1$. Так как по условию мощности отличаются в 2 раза, то токи и сопротивления резисторов отличаются тоже в 2 раза. Отсюда $I_1 = I_A = I_0/3$, и $I_0 = 0{,}75$ мА. Напряжения на резисторах одинаковы и равны $U = P_1/I_1 = 20$ В, а сопротивления резисторов равны $R_1 = P_1/U = 800$ Ом и $R_2 = 400$ Ом.

МОСКОВСКАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 ГОДА

(см. «Квант» №4)

7 класс

1. Поскольку масса Нильса уменьшилась в 1000 раз, т.е. до 30 г, а площадь поперечного сечения мышц уменьшилась всего в 100 раз, то сил двух рук уменьшенного Нильса хватит, чтобы подтянуться с дополнительным грузом такой массы, что суммарная масса составит $10 \cdot 30 \text{ г} = 300 \text{ г}$. Значит, масса дополнительного груза равна 270 г.

2. Объем, занимаемый камнями гальки, меньше полного объема, занимаемого галькой в сосуде, во столько же раз, во сколько насыпная плотность меньше плотности камней. Отсюда получаем пропорцию $\frac{V_к}{V_п} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \approx 0{,}58$. Следовательно, пустоты занимают 0,42 от объема гальки. Поскольку высота слоя гальки была равна 1 м, то в эту гальку может войти слой песка, который имел толщину 42 см. Значит, сверху останется слой песка высотой 18 см, тогда общий уровень насыпки будет равен 118 см.

3. 1) Рассчитаем цену бетона марки М200. Пусть объем цемента в бетоне составляет V. Тогда

$$1\text{ м}^3 = V + 3{,}2V + 4{,}9V, \text{ и } V = 109{,}9\text{ м}^3.$$

Следовательно, цена бетона этой марки

$$c_{200} = \frac{180\text{ руб.}}{50\text{ кг}}\rho_ц V + \frac{102\text{ руб.}}{50\text{ кг}}\rho_п \cdot 3{,}2V + \frac{130\text{ руб.}}{40\text{ кг}}\rho_щ \cdot 4{,}9V \approx 5298\text{ руб/м}^3.$$

Аналогично найдем

$$c_{250} = 5311\text{ руб./м}^3 \text{ и } c_{300} = 5327\text{ руб./м}^3.$$

Для расчета отношения объемов цемента, песка и щебня в бетоне марки М400 запишем уравнение для цены за кубометр этой марки бетона, а также уравнение для объема этой порции бетона. Отсюда найдем $V_ц : V_п : V_щ = 1{,}0 : 1{,}4 : 2{,}8$.

2) Зная цены бетона за кубометр, заметим, что $9{,}4\ \text{м}^3$ бетона марки М250 будут стоить Василию 49924 руб., а марки М300 будут стоить 50070 руб., поэтому наилучшая возможная марка бетона М250.

4. 1) Пропускная способность N автодороги равна количеству автомобилей, которые пересекают линию, перпендикулярную направлению движения, за единицу времени. Если l – средняя длина одного автомобиля, а x – среднее расстояние между автомобилями на магистрали, то пропускная способность магистрали $N_1 = 4\dfrac{v_1}{l+x}$, а пропускная способность дороги вблизи места ДТП $N_2 = 2\dfrac{v_2}{l+y}$, где y – среднее расстояние между машинами при движении рядом с ДТП. Для того чтобы пробка не росла со временем, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $N_2 > N_1$. В предельном случае $y = 0$ это неравенство эквивалентно неравенству $x > 2l\dfrac{v_1}{v_2} - l$, откуда получаем $x > 76$ м.

2) К ответу на второй вопрос можно придти разными способами, причем все они имеют характер оценок. Можно, например, уподобить участок магистрали от перекрестка до места ДТП сосуду, в который поступает жидкость с одним массовым расходом, а вытекает с другим (меньшим), и найти время заполнения этого сосуда. За единицу времени участок от перекрестка до места ДТП покидает количество машин $n_2 = 2\dfrac{v_2}{l} = \dfrac{5}{6}$. За то же время на этот участок въезжает $n_1 = 4\dfrac{v_1}{l+x} = \dfrac{10}{3}$ машин. На момент образования пробки количество машин на участке от пробки до перекрестка равно $N_0 = 4\dfrac{1500}{16+4} = 300$. Когда весь участок от ДТП до перекрестка будет заполнен машинами, количество машин на нем станет $N = 4\dfrac{1500}{4} = 1500$. Время, за которое это произойдет, равно

$$t = \frac{N - N_0}{n_1 - n_2} = \frac{1200 \cdot 2}{5}\ \text{с} = 480\ \text{с} = 8\ \text{мин}.$$

5. Расстояние между Геной и Чебурашкой уменьшается неравномерно, следовательно, они стартовали из своих домов не одновременно. Изобразим график зависимости расстояния s между Геной и Чебурашкой от времени t, оставшегося до встречи (рис.7). График представляет собой ломаную линию, проходящую через начало координат. Самый крутой участок графика соответствует движению и Гены и Чебурашки, более пологий – движению одного из друзей и горизонтальная линия – нахождению обоих дома.

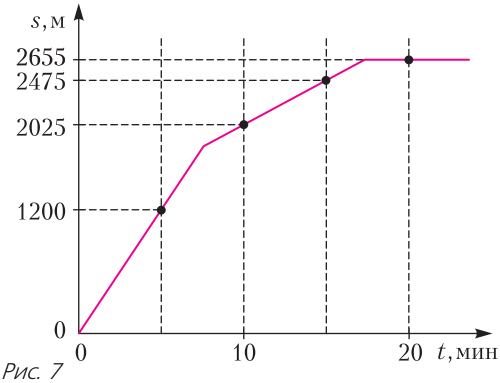


Рис. 7

Нетрудно сообразить, что точки (0; 0) и (5; 1200) лежат на крутом участке, точки (10; 2025) и (15; 2475) – на пологом и точка (20; 2655) – на горизонтальном, т.е. ломаная восстанавливается единственным образом. Значит, расстояние между домами Гены и Чебурашки равно 2655 м.

Найдем скорость одного из друзей по точкам (10; 2025) и (15; 2475):

$$v_1 = \frac{2475\ \text{м} - 2025\ \text{м}}{(15-10)\cdot 60\ \text{с}} = 1{,}5\ \text{м/с}.$$

Скорость сближения Гены и Чебурашки находится по точкам (0; 0) и (5; 1200):

$$v_1 + v_2 = \frac{1200\ \text{м}}{5\cdot 60\ \text{с}} = 4\ \text{м/с}.$$

Поэтому скорость второго друга $v_2 = 2{,}5\ \text{м/с}$.

8 класс

1. 1) Наименьшее значение средней скорости на одном из отрезков времени достигается в том случае, когда на всех остальных отрезках значение средней скорости максимально. Если ширина временнóго интервала $\Delta t = 10$ мин, то справедливо равенство $s = (17v_{\max} + v_{\min})\Delta t$. Отсюда находим $v_{\min} = 9$ км/ч. С другой стороны, наименьшее из значений средней скорости не может быть больше $\dfrac{180\ \text{км}}{3\ \text{ч}} = 60$ км/ч. Таким образом,

$$9\ \text{км/ч} < v_{\min} < 60\ \text{км/ч}.$$

2) Из равенства для s получим $v_{\min} = -8$ км/ч. Это означает, что наименьшее из значений средней скорости на одном из интервалов могло быть равно 0. И так же, как в первом случае, наименьшее из значений средних скоростей не может превышать 60 км/ч. Поэтому

$$0 < v_{\min} < 60\ \text{км/ч}.$$

2. Сначала введем буквенные обозначения: E – солнечная постоянная, L – расстояние от Солнца до Земли, R – радиус Солнца, r – радиус области, в которой вблизи центра Солнца идут термоядерные реакции и где плотность вещества равна $160\ г/см^3 = 160\ т/м^3$. Следовательно, в каждом кубометре объема производится тепловая мощность $\frac{W}{V} = \lambda = 160\ Вт/м^3$. Распределение температур в Солнце давным-давно установилось, поэтому сколько производится энергии за какой-то промежуток времени, ровно столько же энергии за такое же время излучается Солнцем по всем направлениям равномерно. Уравнение баланса энергии таково:

$$\frac{4\pi r^3}{3}\cdot\lambda = 4\pi L^2\cdot E,$$

откуда

$$r = \left(\frac{3L^2E}{\lambda}\right)^{1/3} \approx 83{,}3\cdot 10^3\ км \quad и \quad \frac{r}{R} = 0{,}127.$$

3. 1) $\Delta\rho \approx \frac{4m\Delta h}{\pi d^2 h_0^2} = 5\ кг/м^3$; 2) $\rho_0 = \frac{4m}{\pi d^2 h_0} = 1000\ кг/м^3$; 3) $N = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\Delta\rho} + 1 \approx 10$.

4. 1) Вода начинает появляться на дне мензурки после того, как она заполнит все пустоты в снеге за счет капиллярных эффектов. Таким образом, для объема, занимаемого снегом и водой в момент появления воды на дне сосуда, можно записать

$$V_1 = V_{\text{нераст.сн.}} + V_{\text{воды}},$$

откуда получим

$$\alpha_1 = \frac{\rho_л\left(d_0^2h_0 - d_1^2h_1\right)}{\left(\rho_в - \rho_л\right)d_1^2h_1 + \rho_л d_0^2h_0} \approx 0{,}78.$$

Аналогично находим

$$\alpha_2 = \frac{\rho_л\left(d_0^2h_0 - d_2^2h_2\right)}{\left(\rho_в - \rho_л\right)d_2^2h_2 + \rho_л d_0^2h_0} \approx 0{,}52.$$

2) Предположим, что весь свежий снег растаял, и рассчитаем отношение получившегося объема воды и объема пустот в слое слежавшегося снега:

$$\frac{V_{\text{воды}}}{V_{\text{пустот}}} = \frac{(\rho_л/\rho_в)(1-\alpha_1)H_1S}{\alpha_2H_2S} = 0{,}76.$$

Получается значение меньше 1, следовательно, к моменту появления воды растает не только весь слой свежевыпавшего снега, но и часть слоя слежавшегося снега высотой x. Значение x можно найти из уравнения

$$\frac{\rho_л}{\rho_в}(1-\alpha_1)H_1S + \frac{\rho_л}{\rho_в}(1-\alpha_2)xS = \alpha_2(H_2 - x)S,$$

откуда $x \approx 1{,}3\ см$. Тогда

$$H_{\text{нераст.сн.}} = H_2 - x \approx 8{,}7\ см.$$

9 класс

1. 1) Центр масс человека смещается относительно доски и относительно земли на $L_1 - L_2$. 2) Точка A смещается на $2(L_1 - L_2)$.

2. Уровень воды в сосуде будет таким же, как в начальный момент времени.

3. Расстояние L между Землей и Юпитером изменяется в течение каждого цикла Ио, причем быстрее всего, когда скорость Земли направлена вдоль линии, соединяющей Землю и Юпитер. Иначе говоря, когда эта линия касается орбиты Земли. За один цикл Ио в этом случае расстояние L изменится на

$$\Delta L = 2\pi\cdot 1{,}5\cdot 10^8\cdot\frac{42{,}5}{365\cdot 24}\ км = 4{,}57\cdot 10^6\ км.$$

Это расстояние свет проходит за 16 с. Отсюда для скорости света получаем

$$c = \frac{4{,}57\cdot 10^6\ км}{16\ с} = 2{,}86\cdot 10^8\ м/с.$$

4. Представим себе, что никакого кипения (пленочного или пузырькового) в процессе теплообмена не происходит. Тогда температура T в конечном состоянии определяется уравнением теплового баланса $mc(T_1 - T) = m_0c_0(T - T_0)$, откуда находим $T = 35{,}2\ °C$. В нашем случае необходимо учесть, что некоторая часть этой теплоты, отдаваемой шариком, идет на образование пленки (Q_1) и на образование пара в процессе пузырькового кипения (Q_2). Поэтому уравнение теплового баланса теперь принимает вид $mc(T_1 - T) = m_0c_0(T - T_0) + Q_1 + Q_2$. При этом масса пара, образующегося в обоих процессах, существенно меньше массы воды (это можно подтвердить оценками), так что последнюю можно считать неизменной в течение всего процесса. Напомним, что не весь образовавшийся пар покидает жидкость в процессе пузырькового кипения, а только две трети. Часть пара конденсируется, отдавая тепло воде. Учтем это при подсчете количества теплоты Q_2:

$$Q_2 = \frac{2}{3}mc(T_2 - T_к) = 5500\ Дж.$$

Оценим значение величины Q_1:

$$Q_1 = m_1L = 2{,}2\ Дж.$$

Поскольку Q_2 на три порядка больше Q_1, последней величиной можно пренебречь. В результате из уравнения теплового баланса легко находится конечная температура:

$$T \approx 32{,}1\ °C.$$

Можно сравнить со значением T, полученным без учета потери энергии на испарение. Отличие составляет 3 градуса. Много это или мало? Если бы мы считали, что все время в течение процесса охлаждения шарика до температуры $T_к$ происходит пузырьковое кипение и при этом треть пара конденсируется при всплытии пузырьков, то в сосуде установилась бы температура (кто не верит, пусть проверит) $26{,}8\ °C$. Вообще говоря, 3 градуса это не так мало по сравнению с разностью $35{,}2\ °C - 26{,}8\ °C = 8{,}4\ °C$.

10 класс

1. В верхней точке дуги на центр масс человека действуют две силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Векторная сумма этих сил сообщает центру масс центростремительное ускорение. Максимально возможная скорость центра масс в верхней точке дуги достигается в случае, когда сила реакции обращается в ноль, и равна $v = \sqrt{gH}$. Поскольку траектории центра масс одинаковы на Земле и на Марсе, отношение максимальных скоростей ходьбы равно

$$\frac{v_З}{v_М} = \sqrt{\frac{g_З}{g_М}} = \sqrt{\frac{M_З}{M_М}\left(\frac{R_М}{R_З}\right)^2} \approx 1{,}6 .$$

На каждом шаге человек совершает работу по подъему центра масс на высоту Δh, равную расстоянию по вертикали между верхней и нижней точками траектории. Соответственно, мощность, затрачиваемая при ходьбе с максимально возможной скоростью, равна

$$P = \frac{A}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{L/v},$$

где L – длина шага. Поскольку на Марсе приходится ходить в скафандре, который добавляет к массе человека еще треть, искомое отношение мощностей будет

$$\frac{P_З}{P_М} = \frac{3}{4}\left(\frac{g_З}{g_М}\right)^{3/2} \approx 3{,}1 .$$

2. Для начала выясним, сублимирует ли лед полностью. Количество воздуха в термосе в начальном состоянии равно $\nu_0 = \frac{p_0V_0}{RT_0} \approx 4\cdot10^{-2}$ моль. Если весь этот воздух остынет до температуры сублимации $T_с$, то он отдаст количество теплоты $Q_0 = \nu_0C_V(T_0 - T_с) \approx 88$ Дж. Количество теплоты, необходимое для сублимации всего кубика из сухого льда, равно $Q_1 = q\rho V_1 \approx 920$ Дж. Значит, лед не может сублимировать полностью, поэтому установившаяся температура в термосе равна $T_с = 194$ К. Из уравнения теплового баланса $\nu_0C_V(T_0 - T_с) = \nu М_1 q$ найдем количество сублимировавшего сухого льда: $\nu = \frac{\nu_0C_V(T_0 - T_с)}{М_1 q} \approx 3{,}4\cdot10^{-3}$ моль. Следовательно, в термосе установится давление

$$p_2 = \frac{(\nu + \nu_0)RT_с}{V_0} \approx 7\cdot10^4\ \text{Па}.$$

3. На лягушку действуют три силы: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз, сила «прилипания» F, направленная по нормали к стенке, и векторная сумма сил трения и нормальной реакции R, которая может отклоняться от нормали к поверхности стены на угол α, не больший чем угол трения $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\mu$. Так как лягушка находится в равновесии, векторы этих трех сил образуют треугольник. Для заданного угла наклона стены наименьшая сила F будет соответствовать наибольшему значению угла α, равного α_0. Треугольники сил, полученные для разных углов наклона стены, в случае $\alpha = \alpha_0$ должны быть вписаны в одну окружность, поскольку у всех этих треугольников сторона (mg) и противолежащий угол (α_0) одинаковые. На рисунке 8 изображены два треугольника сил для двух разных углов наклона стены. Легко видеть, что предельному значению силы «прилипания» F_0 соответствует прямоугольный треугольник, в котором эта сила совпадает с диаметром окружности и равна

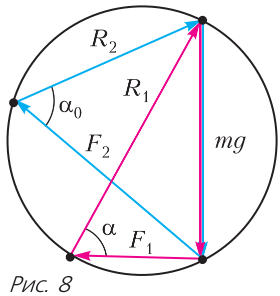


Рис. 8

$$F_0 = \frac{mg}{\sin\alpha_0} = mg\frac{\sqrt{\mu^2+1}}{\mu} \approx 0{,}11\ \text{Н}.$$

4. 1) При работе схемы в качестве стабилизатора ток через нелинейный элемент лежит на участке ВАХ с отрицательным дифференциальным сопротивлением (от 20 до 110 мА). Сопротивление r равно модулю этого сопротивления: $r = 25$ Ом. При этом напряжение на последовательном соединении r и Z составляет 3 В. Это и есть постоянное напряжение на нагрузке.

2) Максимальное значение ΔU достигается, когда на нижней и верхней границах диапазона входных напряжений ток через Z составляет 20 и 110 мА соответственно. Поскольку ток через нагрузку равен $\frac{3\ \text{В}}{300\ \text{Ом}} = 10$ мА, минимальный ток через R_1 должен быть не менее 30 мА, а максимальный – не более 120 мА. Напряжение на нагрузке равно 3 В, а середина диапазона входных напряжений составляет $U_1 = 6$ В, следовательно, напряжение на резисторе R_1 должно удовлетворять неравенству $3\ \text{В} - \Delta U \le U_1 \le 3\ \text{В} + \Delta U$, из которого следует $3\ \text{В} - \Delta U = R_1\cdot 30\ \text{мА}$ и $3\ \text{В} + \Delta U = R_1\cdot120\ \text{мА}$. Отсюда получаем $R_1 = 40$ Ом.

5. 1) Давление в цилиндрах одинаковое, поскольку они соединены трубкой. Когда относительный объем газа в вытеснительном цилиндре равен нулю, можно считать, что весь газ находится в рабочем цилиндре. Объем газа в этом цилиндре можно узнать по графику (см. рис.11 в условии). Для этого следует провести изобару и найти точки, в которых она пересекается с графиком цикла для рабочего цилиндра. Таких точек будет две. Точка, соответствующая большему значению объема, – искомая. Аналогичные действия следует проделать и для вытеснительного цилиндра. В итоге можно получить такие числовые значения: для рабочего цилиндра $p_1 = 2{,}5p_0$, $V_1 = 0{,}53V_{01}$; для вытеснительного цилиндра $p_2 = p_0$, $V_2 = 0{,}53V_{02} = 1{,}25 \cdot 0{,}53V_{01}$. Отношение температур равно

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p_1V_2}{p_2V_2} = 2\,.$$

2) Отношение количеств вещества при давлении $3p_0$ равно $\frac{\nu_1}{\nu_2} \approx \frac{V_1}{V_2}\frac{T_0}{T} = \frac{0{,}36}{0{,}03 \cdot 1{,}25}\frac{1}{2} = \frac{24}{5}$, поэтому в рабочем цилиндре находится $\frac{24}{29} \approx 0{,}83 = 83\%$ общей массы воздуха.

3) Поршень в рабочем цилиндре за цикл совершает положительную работу, пропорциональную площади S_1. Поршень вытеснительного цилиндра совершает отрицательную работу, пропорциональную площади S_2, при этом коэффициент пропорциональности в 1,25 раз больше, чем в первом случае. Суммарная работа газа за цикл равна $A = k(S_1 - 1{,}25S_2)$, где k – размерный коэффициент пропорциональности. Искомое отношение работ равно

$$\eta = \frac{A}{A_1} = 1 - 1{,}25\frac{S_2}{S_1} = 0{,}5\,.$$

11 класс

1. Для того чтобы понять, как работает схема, рассмотрим поэтапно, что происходит после подключения к сети. Верхний конденсатор помечаем индексом 1, нижний – индексом 2. На первой четверти периода левый диод открыт, верхний конденсатор заряжается, при этом $U_1 = -U(t)$. В момент времени $t = \frac{T}{4}$ напряжение на верхнем конденсаторе $U_1 = U_0$. Сразу после этого потенциал точки *A*, который равен $\varphi_A = U(t) + U_0$, становится положительным, открывается правый диод, а левый закрывается, начинает заряжаться нижний конденсатор, а верхний разряжается. При этом в процессе зарядки будет справедливо соотношение $U_2 - U_1 = U(t)$. Кроме того, суммарный заряд правых обкладок конденсаторов должен оставаться постоянным и равным CU_0, пока диод, включенный между *A* и *B*, закрыт, иначе говоря, должно быть справедливо равенство $U_2 + U_1 = U_0$. Таким образом, пока диод закрыт, напряжения на конденсаторах удовлетворяют соотношениям

$$U_1 = \frac{U_0 - U(t)}{2}\,,\; U_2 = \frac{U_0 + U(t)}{2}\,.$$

Процесс зарядки нижнего конденсатора будет продолжаться до тех пор, пока потенциал точки *A* будет положительным. Отсюда следует, что

$$\varphi_A = U(t) + U_1 = \frac{U_0 + U(t)}{2}\,.$$

К моменту времени $t = \frac{3T}{4}$, когда потенциал на входе равен $+U_0$, напряжения на конденсаторах станут $U_1 = 0$ и $U_2 = U_0$. Потенциал точки *A* на второй и третьей четвертях периода будет положительным. На последней четверти периода ничего происходить не будет, поскольку потенциал точки *A* будет положительным, но меньшим U_0, так что оба диода будут закрыты. В первой четверти второго периода левый диод откроется, верхний конденсатор зарядится до напряжения U_0. На второй четверти ничего происходить не будет, поскольку диоды будут закрыты. На третьей четверти откроется правый диод, к концу третьей четверти нижний конденсатор зарядится до $\frac{3U_0}{2}$, а верхний разрядится до $\frac{U_0}{2}$. Так что, с учетом полярности, суммарное напряжение на конденсаторах к концу третьей четверти будет равно U_0. В последней четверти второго периода ничего происходить не будет. В первой четверти третьего периода верхний конденсатор опять зарядится до напряжения U_0, а в третьей четверти начнет заряжаться нижний конденсатор. К концу третьей четверти напряжение на верхнем конденсаторе равно $\frac{3U_0}{4}$, а на нижнем $\frac{7U_0}{4}$. Так же, как в предыдущем периоде, к концу третьей четверти суммарное напряжение на конденсаторах будет равно U_0. В последней четверти ничего происходить не будет. В каждом следующем периоде на нижний конденсатор переходит с верхнего вдвое меньший заряд, чем в предыдущем. Легко видеть, что через время nT напряжение на нижнем конденсаторе будет $2U_0 - U_0 \cdot 2^{1-n}$. Уже через секунду (50 периодов) после подключения к сети на нижнем конденсаторе установится практически неизменное напряжение $2U_0$. Итак, ответы на первый вопрос: U_0, $\frac{7U_0}{4}$, $2U_0$.

Для ответа на второй вопрос найдем характерное время разрядки одного конденсатора через нагрузку: $t_0 = RC = 1$ с. Время t_0 значительно больше периода переменного напряжения T =

$= 0{,}02$ с. Это означает, что при подключении нагрузки напряжения на конденсаторах за период изменяются на малую величину по сравнению с U_0. Среднее напряжение $U_н$ на нагрузке будет примерно равно $2U_0$. По порядку величины отклонение напряжения на нагрузке от среднего значения равно $\delta U = IT\frac{1}{C} = \frac{2U_0}{R}T\frac{1}{C}$. Таким образом, относительное отклонение от среднего значения равно $\frac{\delta U}{U_н} = \frac{T}{t_0} = 2\%$.

2. 1) Если буер движется с постоянной скоростью, то сила F направлена перпендикулярно скорости, а сила D – вдоль скорости ветра относительно буера w. Из треугольника скоростей находим

$$v = u(\cos\theta + k\sin\theta).$$

Отсюда, используя «метод вспомогательного угла» из тригонометрии, можно получить выражение для максимально возможной скорости буера:

$$v_{max} = u\sqrt{k^2+1}.$$

Обратите внимание на удивительный результат: $v_{max} > u$. На первый взгляд кажется, что буер не может двигаться быстрее скорости ветра. Однако в рамках данной модели такое движение возможно. Если каким-нибудь образом удалось разогнать буер с парусом в виде крыла до скорости v_{max}, то в случае пренебрежимо малой силы трения он продолжит двигаться с этой скоростью.

2) Максимальное ускорение достигается, когда максимально возможная сила действует в направлении скорости буера. Максимальной силе D соответствует точка B на рисунке 9, для которой $C_D = 1{,}1$. Плотность воздуха, необходимая для расчета силы, находится из уравнения состояния идеального газа и получается $\rho \approx 1{,}3$ кг/м^3. Скорость ветра w относительно буера в момент старта равна скорости ветра относительно земли u. Тогда

$$a_{max} = \frac{1{,}1\rho u^2 S}{2m} \approx 5 \text{ м/с}^2.$$

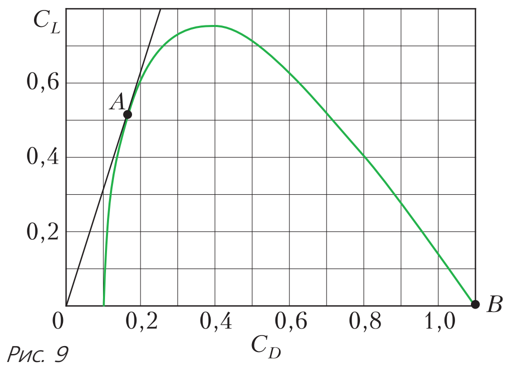


Рис. 9

3) При движении с постоянной скоростью выполняется равенство $\operatorname{ctg}\varphi = k$, при этом k может принимать значения от 0 до $k_{max} \approx 3{,}1$, соответствующего точке A на графике. Угол φ может принимать значения от $\varphi_{min} \approx 18°$ ($\operatorname{ctg}\varphi_{min} = k_{max} \approx 3{,}1$) до $90°$. Для заданного значения угла θ при условии $0 < \theta < 90°$ и заданной скорости ветра u всегда можно подобрать такое значение скорости буера v, что угол φ будет удовлетворять неравенству $18° < \varphi < 90°$. Физически это означает, что при движении под острым углом θ к скорости ветра всегда можно ориентировать парус так, что будет возможным движение с постоянной скоростью. Рассмотрим значения угла $\theta > 90°$. Оказывается аэродинамическая форма паруса делает такое движение возможным, однако существует предельный угол θ_{max}, который может составлять скорость буера v со скоростью ветра u. Поскольку $\varphi + \theta < 180°$, для предельного значения справедливо равенство $\theta_{max} = 180° - \varphi_{min} \approx 162°$. Предельный случай соответствует движению с близкой к нулю скоростью v. Таким образом, угол θ может принимать значения от $0°$ до $162°$.

3. Из равенства потенциалов точек E и F в любой момент времени при подключенном источнике следуют соотношения

$$i_C R = L\frac{di_L}{dt}, \quad \frac{q}{C} = i_L R, \text{ а также } \frac{i_C}{C} = R\frac{di_L}{dt}.$$

Отсюда получаем $CR^2 = L$. Пусть потенциал точки B равен нулю, а источник подключен так, что потенциал точки A равен $\mathcal{E}$. Тогда потенциал точки E равен $\varphi_E = \mathcal{E} - i_C R$, а потенциал точки F равен $\varphi_F = i_L R$. Из равенства потенциалов этих точек следует $i_C + i_L = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Иначе говоря, ток через источник (когда он подключен к цепи) остается постоянным, поэтому заряд, протекающий через источник за время t_0, равен $q = \frac{\mathcal{E}t_0}{R}$.

Легко показать, что энергии конденсатора и катушки в любой момент времени одинаковы:

$$W_C(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{(i_L RC)^2}{2C} = \frac{Li_L^2}{2} = W_L(t).$$

Из закона сохранения энергии следует что энергии катушки и конденсатора на момент отключения источника равны

$$W_L(t_0) = W_C(t_0) = \frac{A_{\mathcal{E}} - Q}{2} = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2}.$$

После отключения от источника на каждом резисторе выделится количество теплоты

$$Q_1 = W_L(t_0) = W_C(t_0) = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2}.$$

4. Обозначим радиус шарика R_0. Удобно ввести в рассмотрение параметр, равный установившейся скорости движения шарика при падении с большой высоты:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4mg}{\rho_0 S}} = \sqrt{\frac{16\rho}{3\rho_0} g R_0} \approx 22{,}3 \text{ м/с},$$

где $\rho_0 = \frac{pM}{RT} \approx 1{,}28 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха при нормальных условиях.

Пусть шарик движется по круговой траектории радиусом R, а точка, в которой человек держит нитку, движется по концентрической круговой траектории радиусом r. На рисунке 10 показаны силы, действующие на шарик: T_τ – тангенциальная составляющая силы натяжения нитки, T_R – радиальная составляющая силы натяжения, F_c – сила сопротивления воздуха. Действием силы тяжести пренебрегаем, поскольку $v \gg \sqrt{gL}$. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на радиальную и тангенциальную оси:

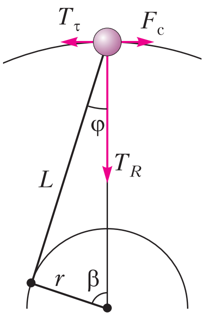


Рис. 10

$$T_\tau = \frac{mgv^2}{v_0^2} = \frac{\rho_0 \pi R_0^2 v^2}{4}, \quad T_R = \frac{mv^2}{R} = \frac{4}{3}\rho\pi\frac{R_0^3}{R}v^2.$$

При этом

$$\frac{T_\tau}{T_R} = \frac{gR}{v_0^2} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Легко показать, что угол φ можно считать малым, поэтому $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$. Для радиуса большой окружности справедливо приближенное равенство $R = L\cos\varphi + r\cos\beta \approx L + r\cos\beta$, тогда $\varphi \approx \frac{gL}{v_0^2} + \frac{gr\cos\beta}{v_0^2}$. Запишем для треугольника, образованного отрезками r, R и L, теорему синусов:

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{L}{\sin\beta}, \text{ или } r\left(\sin\beta - \frac{gL\cos\beta}{v_0^2}\right) = L\frac{gL}{v_0^2}.$$

Минимальное значение радиуса r достигается, когда выражение в скобках максимально. Легко видеть, что это происходит при наибольшем из возможных значений угла β, равным $\beta_{max} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, т.е. когда нитка идет вдоль касательной к окружности. В этом случае угол между L и r – прямой. В итоге получаем

$$r = L\frac{gL}{v_0^2 \sin\beta_{max}} = L\frac{gL}{v_0^2\cos\varphi} \approx$$
$$\approx L\frac{gL}{v_0^2} \approx L\frac{3L}{16\rho R_0}\frac{pM}{RT} \approx 20 \text{ мм}.$$

5. 1) Полукруглая пластина вблизи вертикальной плоскости симметрии, перпендикулярной пластине, представляет собой комбинацию плоскопараллельной пластинки толщиной R и тонкой плосковыпуклой линзы с радиусом выпуклой поверхности R (рис.11). Пластинка формирует изображение S_1 источника S_0 на расстоянии $x = R\frac{n-1}{n}$ от него (в параксиальном приближении). Изображение является предметом для линзы и располагается на расстоянии $a = R - x$ от линзы. Оптическая сила линзы равна $D = \frac{n-1}{R}$, поэтому расстояние a' от линзы до итогового изображения S_2 можно легко найти, записав формулу линзы:

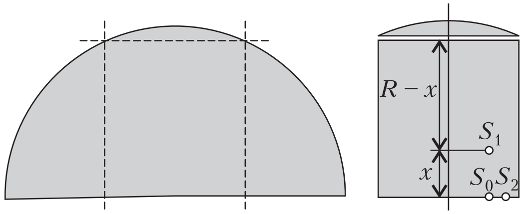


Рис. 11

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{R-x} + \frac{1}{a'}, \quad \frac{n-1}{R} = \frac{n}{R} + \frac{1}{a'}, \quad a' = -R.$$

Знак «–» указывает на то, что изображение клеток «миллимитровки» оказывается мнимым. Собственно, так и должно быть. Полуцилиндр в данном случае работает как лупа.

Поскольку изображение предмета в плоскопараллельной пластинке находится на расстоянии $R - x = \frac{R}{n}$ от линзы, линейное увеличение равно $\Gamma = \frac{|a'|}{R-x} = n$. Отсюда и из фотографии в условии следует ответ. Достаточно хорошо видно, что $29(\pm 0{,}5)$ мм на миллиметровой сетке соответствует 20 мм на сетке-изображении внутри пластины вблизи ее середины. Поэтому $n \approx 1{,}47 \pm 0{,}03$.

2) Наблюдатель, располагающийся в точке B (рис.12), может видеть только те линии сетки, которые лежат левее точки L. Луч LA падает на сферическую границу раздела под углом полного внутреннего отражения $\varphi = \arcsin\frac{1}{n}$. По фотографии можно определить значение $2R \approx 150$ мм. Заданное в условии расстояние от наблюдателя до середины пластины $OB = 2R$, откуда следует, что $\alpha \approx 30°$. Запишем для треугольника OAL теорему синусов: $\frac{R}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{l}{\sin\varphi}$, откуда найдем

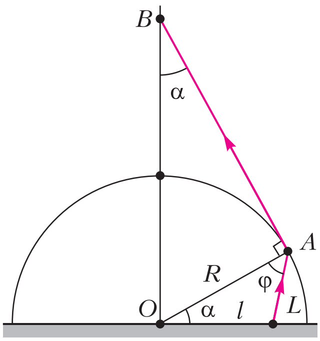


Рис. 12

$$l = R\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = R\frac{2}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\varphi} \approx 0{,}69R \approx 51{,}9 \text{ мм.}$$

Разделив значение $2l$ на 1 мм, получим максимальное количество линий сетки, которые сможет видеть наблюдатель: $N \approx 103$.

3) Используя фотографию, можно сделать оценку снизу расстояния до главной плоскости объектива при съемке. По фотографии мы попытаемся максимально точно определить l и, используя формулу для l, найдем сначала $\sin(\alpha+\varphi)$, а затем $\sin\alpha$. Положим $2l = 120$ мм. Тогда

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{R}{l}\sin\varphi = 1{,}25\frac{1}{n} \approx 0{,}85\,,$$

$$\alpha+\varphi \approx 58^\circ\,,\quad \alpha \approx 15{,}5^\circ\,.$$

Искомое расстояние равно

$$H = \frac{R}{\sin\alpha} \approx 28 \text{ см}\,.$$

6. 1) Проанализируем, на основании заданных в условии зависимостей, цикл с термодинамической точки зрения. Поскольку значение коэффициента p отрицательное, из формулы $\frac{\Delta Q}{V} = c\Delta T + pT\Delta E$, данной в условии, следует, что увеличение E (эквивалентное зарядке конденсатора с сегнетоэлектриком) при постоянной температуре соответствует отрицательным значениям ΔQ, а увеличение температуры при постоянном поле E соответствует $\Delta Q > 0$. Таким образом, на участках 2–3 и 3–4 тепло подводится, а на участках 4–1 и 1–2 отводится. На участке 2–3 напряженность поля E постоянна, поэтому количество теплоты определяется только увеличением температуры и равно $Q_{23} = cV(T_H - T_L)$. Аналогично рассчитывается количество теплоты на участке 4–1: $Q_{41} = cV(T_L - T_H)$. На участке 3–4 подвод тепла обусловлен только изменением электрического поля, поэтому $Q_{34} = pT_H(E_L - E_H)V$. Аналогично, $Q_{12} = pT_L(E_H - E_L)V$.

Теперь можно определить КПД цикла:

$$\eta_1 = 1 + \frac{Q_{41}+Q_{12}}{Q_{23}+Q_{34}} = \frac{-p(T_H - T_L)(E_H - E_L)}{c(T_H - T_L) - pT_H(E_H - E_L)}\,.$$

Отметим, что при $\left|\frac{p(E_H - E_L)}{c}\right| \to \infty$ КПД цикла стремится к КПД цикла идеальной тепловой машины $\eta_0 = 1 - \frac{T_L}{T_H}$.

2) При адиабатическом увеличении температуры на малую величину ΔT из соотношения для $\frac{\Delta Q}{V}$ следует, что $c\Delta T = -pT\Delta E$. Выразим отсюда ΔT и подставим в данное в условии выражение для ΔD:

$$\Delta D = \varepsilon_0\varepsilon\Delta E - \frac{p^2T}{c}\Delta E\,.$$

Это уравнение определяет график адиабаты в малой окрестности точки на диаграмме D–E. При этом график изотермы определяется соотношением $\Delta D = \varepsilon_0\varepsilon\Delta E$. Отсюда следует, что касательная к графику адиабаты в любой точке составляет меньший угол с горизонтальной осью, чем изотерма. При этом с увеличением температуры угол наклона касательной к адиабате уменьшается. Искомый цикл схематично изображен на рисунке 13 красным цветом.

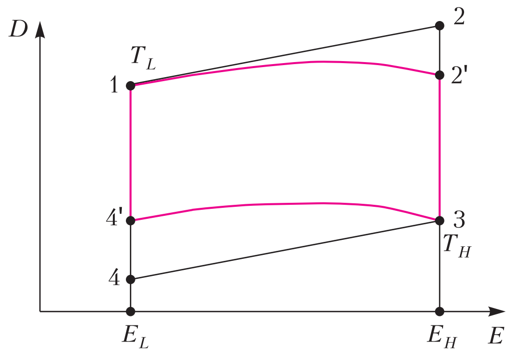


Рис. 13

3) Определим сначала температуры в точках $2'$ и $4'$:

$$T_{2'} = T_L\left(1 - \frac{p\Delta E}{c}\right),\quad T_{4'} = T_H\left(1 - \frac{p\Delta E}{c}\right).$$

Поскольку в цикле $12'34'$ подвод и отвод тепла осуществляются в процессах $2'$–3 и $4'$–1, КПД этого цикла равен

$$\eta_2 = 1 + \frac{Q_{4'1}}{Q_{2'3}} = 1 + \frac{T_1 - T_{4'}}{T_3 - T_{2'}}\,.$$

Подставив сюда значения $T_1 = T_L$ и $T_3 = T_H$, а также значения температур T_2' и T_4' и введя обозначения $\Delta T = T - T_L$ и $r = -\frac{p\Delta E}{c}$ $(r > 0)$, приходим к равенству

$$\eta_2 = \frac{r\Delta T}{\Delta T - rT_L}.$$

В тех же обозначениях для КПД цикла с изотермическими зарядкой и разрядкой получим

$$\eta_1 = \frac{r\Delta T}{\Delta T + rT_H}$$

Видно, что $\eta_2 > \eta_1$, иначе говоря, адиабатическая зарядка выгоднее изотермической.

ЕВРОПЕЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ДЛЯ ДЕВУШЕК

1. $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,-1,-1)$, $(-1,0,-1)$, $(-1,-1,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Указание. Задача становится проще после сведения данных равенств к однородным равенствам путем замены c на $c(ab+bc+ca)$ и т.д.

2. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Указание. Каждая доминошка «закрывает» свою *окрестность* из 8 клеток. Эти окрестности не должны перекрываться, должны покрывать доску $2n \times 2n$ и не должны выходить за пределы доски $(2n+2)\times(2n+2)$, получающейся из данной доски добавлением «внешней рамки».

3. *Указание.* Пусть биссектрисы углов DAB и CXB пересекают BC в точках S и T соответственно. Из подсчета углов можно вывести, что окружность (ABI) проходит через S.

Далее, прямая XT, как и AI, проходит через середину N дуги BC. Подсчет углов (из условия касания окружности (AXI) с прямой AC) дает $\angle IXN = \angle ABC$. Несложно доказать подобие $\Delta NTI \sim \Delta NIX$, из которого $\angle TIN = \angle IXN = \angle ABC$, значит, окружность (ABI) проходит через T, откуда $T = S$.

4. *Указание.* Из касаний можем вывести $\angle PIQ = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Из последнего условия нетрудно доказать касание отрезка PQ и вписанной окружности (например, проводя касательную PQ' так, что вписанная окружность является вневписанной для треугольника APQ', можно доказать, что $Q = Q'$).

5. *Указание.* Из рассмотрения по модулю n получается, что с учетом второго условия третье условие можно заменить на следующее: $(b_1+\dots+b_n)-(a_1+\dots+a_n) \le \frac{n(n-1)}{2}$.

Этого можно добиться, выбирая $b_1, b_2, \ldots$ последовательно так, чтобы $b_1 - a_1 = 0$, $0 \le b_2 - a_2 \le 1$, $0 \le b_3 - a_3 \le 2$, …, $0 \le b_n - a_n \le n-1$.

6. *Указание.* Предположим противное.

В каждой отмеченной точке поставим метку 0, 1, 2 в соответствии с остатком при делении на 3 сопоставленного числа. Тогда из условия на синие числа следует, что у любого отрезка два конца имеют разные метки, т.е. имеются отрезки трех типов: с концами 12, 01 и 02.

Из условия на желтые числа следует, что количество отрезков типа 12 равно $\left[\frac{N+3}{3}\right]$, типа 01 – $\left[\frac{N+2}{3}\right]$, типа 02 – $\left[\frac{N+1}{3}\right]$.

Далее, из условия следует, что суммарное количество отрезков, у которых один из концов имеет метку 0 (т.е. суммарное количество отрезков типа 01 и 02), нечетно. То же справедливо для суммарного количества отрезков типа 12 и 01. Отсюда можно получить противоречие с известными нам количествами отрезков каждого типа.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: +7 495 363-48-86,

htpp: //capitalpress.ru

УрожайныЙ МАРТ

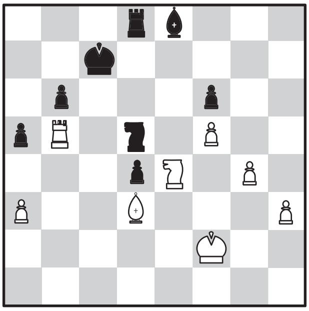
Март 2019 года стал по-настоящему урожайным месяцем для молодого российского гроссмейстера из Омска Владислава Артемьева. Сначала он в составе сборной России занял первое место на командном чемпионате мира в Астане, а затем одержал победу на личном чемпионате Европы в Скопье.

В сегодняшнем выпуске мы разберем две партии победителя европейского чемпионата.

В.Артемьев – Д.Паравян
Скопье, 2019

1. ♘f3 ♞f6 2. c4 c5 3. ♘c3 d5 4. cd ♞d5 5. e3 e6 6. ♘d5 ed 7. b4!? Такой радикальный способ борьбы с висячими пешками черных придумал несколько лет назад испанский гроссмейстер Д.Антон. **7...c4 8. ♗b2 ♝b4 9. ♗g7 ♜g8 10. ♗e5 ♞c6 11. ♗g3 c3?! 12. a3! cd+?!** (12... ♝a5 выглядит аккуратнее) **13. ♘d2 ♝c3 14. ♖c1 d4 15. ♗d3! h5!?** (Черные должны играть активно, иначе рискуют столкнуться с неприятностями: 15...de? 16. ♖c3 ed+ 17. ♕d2.) **16. 0-0 h4 17. ♘e4!?** Преимущество в развитии позволяет белым осуществить позиционную жертву фигуры ради активной игры по линии f. **17...hg 18. fg ♝e6! 19. ♕h5.** Шах ничего не дает: 19. ♘f6+ ♚e7 20. ♘g8+ ♛g8, и черный король в безопасности. **19... ♛a5 20. ♕h4 ♛e5! 21. ♘f6+ ♚d8?** Ошибка. После правильного 21... ♚f8 за белых трудно придумать что-то лучше, чем вечный шах: ♘h7-♘f6. **22. ♘g8+ ♚c7 23. ♘f6?!** (23. ♘e7! ♛e3+ 24. ♔h1 ♜e8 25. ♘c6 bc 26. ♕h7 ♝d5 27. ♖b1 и компенсация черных недостаточна) **23... ♝d2?!** (лучше 23... ♛e3+ 24. ♔h1 ♛d3 25. ♕f4+ ♚b6) **24. ♘e4!? ♝e3+ 25. ♔h1 ♝c1 26. ♖c1 ♜h8 27. ♕f4 ♛f4 28. gf.**

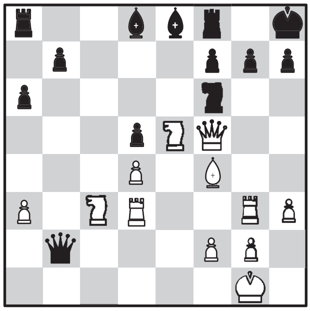
Креативная, но не вполне точная игра привела соперников к равной позиции с небольшой инициативой у белых. **28... ♝f5 29. ♔g1 ♝g6 30. h3 a5 31. ♖c5 b6** (активное 31... ♝e4!? 32. ♗e4 ♜e8 выглядит предпочтительнее) **32. ♖g5 ♞e7 33. ♔f2 f6 34. ♖b5 ♜d8 35. g4 ♞d5?** (и здесь лучше было сыграть 35... ♝e4 36. ♗e4 d3 37. ♖b1 d2 38. ♖d1 ♜d4 39. ♔e3 ♜a4) **36. f5 ♝e8.**



Последние несколько пассивных ходов черных позволяют белым создать сразу три проходных пешки путем жертвы качества: **37. ♖d5! ♜d5 38. ♘f6 ♜e5 39. ♘e8+ ♜e8 40. g5 ♚d6 41. f6 b5 42. h4 b4 43. a4?** Потеря важного темпа, которая могла стоить белым пол-очка (43. ab ab 44. h5!). **43...b3?** (43... ♜b8! 44. h5 ♚e6, и черный король успевает заблокировать белые пешки) **44. g6 ♚e6 45. f7 ♜b8 46. h5 ♚f6 47. h6 b2 48. ♔f3 ♜d8 49. ♔g4 ♜c8 50. h7 ♜d8 51. ♔h5 ♚g7 52. ♔g5.** Черные беспомощны, так как обе их фигуры должны контролировать поля f8 и h8 и не могут препятствовать потере оставшихся пешек. **52... ♜d5+ 53. ♔g4 ♜d8 54. ♔f5 ♜c8 55. ♔e6 ♜b8 56. ♔e5 ♜d8 57. ♗b1 ♜b8 58. ♔d4 ♜b4+ 59. ♔c5 ♜h4 60. ♔b5 ♜h5+ 61. ♔c4 ♜h3 62. ♗e4 ♚f8 63. ♗f5 ♜h2 64. ♔c3 ♚g7 65. ♗c2 ♜h4 66. ♔b2 ♜h3 67. ♗f5 ♜h5 68. ♗d3 ♜h4 69. ♔c3 ♜f4 70. ♗e4 ♜h4 71. ♔d4 ♜h5 72. ♔c4. Выигрыш белых.**

В.Артемьев – З. Храчек
Скопье, 2019

1. c4 c5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♘c3 ♞f6 4. e3 e6 5. d4 d5 6. cd ed 7. ♗b5 cd 8. ed ♝e7 9. 0-0 0-0 10. ♘e5 ♝d7 11. ♗g5 ♜c8 12. ♖e1 ♜e8 13. ♖c1 a6 14. ♗c6 ♝c6 15. ♕f3!? Ловушка: на 15... ♛b6 последует 16. ♗f6 ♞f6 17. ♘d5 ♝d5 18. ♕d5 ♝e5 19. ♕e5! с выигрышем. **15... ♛d6.** Слишком пассивно. Черные могли подготовить выпад ферзя на b6, предварительно сделав форточку: 15...h6. **16. h3 ♝d8 17. ♖e3 ♜f8 18. ♖ce1 ♛b4 19. ♕f5 ♜a8 20. ♖d1 ♞e8 21. ♗f4 ♞f6 22. ♖g3 ♚h8 23. ♖dd3 ♝e8 24. a3 ♛b2?** Пешка отравлена. Ферзь должен был поспешить на помощь своему королю: 24... ♛b6 с идеей ♛e6.



Белые фигуры максимально сконцентрировались на королевском фланге, и теперь следует наказание за пассивную игру: **25. ♖g7! ♚g7 26. ♖g3+** (типичное 26. ♗h6+ не работает в этой позиции из-за 26...♚h6 27. ♖g3 ♛c1+! 28. ♔h2 ♜g8) **26... ♚h8 27. ♘d5! ♞d5 28. ♗h6 ♝f6** (28... ♜g8 29. ♖g8+ ♚g8 30. ♕g4+) **29. ♕f6+!** Симпатичная финальная жертва, вынуждающая черных сложить оружие ввиду неизбежного мата (29... ♞f6 30. ♗g7+ ♚g8 31. ♗f6×). **Выигрыш белых.**

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

СИММЕТРИЯ И АСИММЕТРИЯ МИРОЗДАНИЯ

Оказывается, симметрия бабочки (или зеркальная симметрия) причастна и к физике тоже.

(Подробнее – в одном из следующих номеров журнала)

ISSN 0130-2221 19005
9 770130 222191